奥林匹克数学

钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

初三分册

OLYMPIC MATHS



奥林匹克数学 初三分册 钱展望 朱华伟／编著 湖北教育出版社

金牌教练教你学

奥林匹克数学

初三分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学.初三分册/钱展望,朱华伟主编.—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3142-5

Ⅰ.奥… Ⅱ.①钱…②朱… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011148 号

出版 发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com

武汉市青年路 277 号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32 8.25 印张
版 次:2002 年 3 月第 1 版 2002 年 3 月第 1 次印刷
字 数:200 千字 印数:1-8 000

ISBN 7-5351-3142-5/G·2548 定价:10.50 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛（1894年）。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002 年 1 月



钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国"五一"劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。



朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。


ISBN 7-5351-3142-5
9 787535 131423 >
定价：10.50元

目 录

第一讲　一元二次方程的解法……………………………… 1
第二讲　韦达定理……………………………………………… 7
第三讲　整系数一元二次方程 ……………………………… 15
第四讲　可化归为一元二次方程的方程(组)(一) ……… 22
第五讲　可化归为一元二次方程的方程(组)(二) ……… 30
第六讲　一元二次方程的应用 ……………………………… 36
第七讲　函数 ………………………………………………… 43
第八讲　二次函数的图象和性质 …………………………… 51
第九讲　解直角三角形 ……………………………………… 59
第十讲　$[x]$与$\{x\}$ ……………………………………… 68
第十一讲　同余 ……………………………………………… 77
第十二讲　圆的基本性质 …………………………………… 83
第十三讲　圆内接四边形、四点共圆……………………… 92
第十四讲　圆的切线、圆的外切多边形…………………… 99
第十五讲　圆和圆 ………………………………………… 108
第十六讲　圆幂定理……………………………………… 116
第十七讲　三角形的四心………………………………… 124
第十八讲　面积…………………………………………… 133
第十九讲　覆盖与嵌入…………………………………… 142
第二十讲　抽屉原理……………………………………… 151
第二十一讲　操作问题…………………………………… 157
第二十二讲　从特殊性看问题…………………………… 164
第二十三讲　换个角度看问题…………………………… 175
练习解答…………………………………………………… 185

第一讲　一元二次方程的解法

知识点和方法述要

1. 两边都是关于未知数的整式的方程叫作整式方程. 只含一个未知数且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

任何一个一元二次方程即可通过展开、移项、合并同类项等步骤把它化成一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$. a,b,c 分别为二次项、一次项、常数项的系数.

2. 解一元二次方程有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法. 后二种最为常用. 对于一般形式的一元二次方程，求根公式为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (b^2-4ac\geqslant0).\qquad ①$$

尽管配方法解一元二次方程并不多，但配方法本身是一重要的数学方法.

3. 记 $\Delta=b^2-4ac$. Δ 被称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$的根的判别式. 由①可看出：当 $\Delta>0$ 时方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta=0$ 时方程有两个相等的实数根；当 $\Delta<0$ 时方程没有实数根. 反之也成立.

一元二次方程的根的判别式是关于方程的系数的一个代数式，有关项的系数在方程化为一般形式后方可确定.

例题精讲

例 1　解下列关于 x 的方程：

(1) $(a^2-1)x+(ax^2-1)=a^2(x^2-x+1)$;

(2) $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$.

分析 (1) 原方程可变为

$$a(a-1)x^2-(2a^2-1)x+a(a+1)=0. \qquad ①$$

这个方程是不高于二次的方程，当 $a=0,1$ 时，方程为一次方程，分别解得 $x=0$ 与 $x=2$. 当 $a\neq 0,1$ 时，①为二次方程，进行因式分解，可得

$$[ax-(a+1)]\cdot[(a-1)x-a]=0,$$

解得 $x_1=\dfrac{a+1}{a}$，$x_2=\dfrac{a}{a-1}$.

(2)配方，可得

$$[x-(a^2+b^2)]^2=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2,$$

即
$$x-(a^2+b^2)=\pm 2ab,$$

所以
$$x_1=(a+b)^2, x_2=(a-b)^2.$$

若从计算判别式入手，则

$$\Delta=4(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2=16a^2b^2,$$

运用求根公式得

$$x=a^2+b^2\pm 2ab=(a\pm b)^2.$$

注意到$(a^2-b^2)^2=(a+b)^2(a-b)^2$，分解因式，原方程可变为

$$[x-(a+b)^2][x-(a-b)^2]=0,$$

故 $x_1=(a+b)^2, x_2=(a-b)^2$.

例 2 已知关于 x 的方程：$3x^2+2ax-a^2=0$ 的一个根为 1，求它的另一根.

解 因 1 是方程 $3x^2+2ax-a^2=0$ 的根，故

$$3\times 1^2+2a\times 1-a^2=0,$$

即
$$a^2-2a-3=0,$$

又可变为
$$(a-3)(a+1)=0.$$

故 $a=3$ 或 $a=-1$.

当 $a=3$ 时，原方程为 $3x^2+6x-9=0$，解得 $x_1=1, x_2=-3$；当 $a=-1$ 时，原方程为 $3x^2-2x-1=0$，解得 $x_3=1, x_4=-\dfrac{1}{3}$.

所以，方程的另一根是 -3 或 $-\frac{1}{3}$.

例 3 已知方程 $(x-19)(x-97)=p$ 有实根 r_1 和 r_2，试求方程 $(x-r_1)(x-r_2)=-p$ 的最小实根.

分析 $(x-19)(x-97)=p$ 是一元二次方程，因 r_1, r_2 是它的两个实根，故

$$(x-19)(x-97)-p=(x-r_1)(x-r_2)=0.$$

进而知 $$(x-r_1)(x-r_2)+p=(x-19)(x-97),$$

可见 19，97 为方程 $(x-r_1)(x-r_2)+p=0$ 的两个实根，19 为所求.

例 4 已知 a 是方程 $x^2+x-\frac{1}{4}=0$ 的根，求 $\frac{a^3-1}{a^3-a}$ 的根.

解 由根的定义知 $a^2+a-\frac{1}{4}=0$，即 $a^2+a=\frac{1}{4}$. 于是，有

$$\frac{a^3-1}{a^3-a}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)(a+1)}=\frac{a^2+a+1}{a(a+1)}=\frac{a^2+a+1}{a^2+a}=\frac{\frac{1}{4}+1}{\frac{1}{4}}=5.$$

例 5 已知二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根和为 S_1，两根平方和为 S_2，两根立方和为 S_3，试求 $aS_3+bS_2+cS_1$ 的值.

解 设方程的两根为 x_1, x_2，则 $ax_1^2+bx_1+c=0$，$ax_2^2+bx_2+c=0$. 于是

$$\begin{aligned}
&aS_3+bS_2+cS_1\\
&=a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x^2x_2)+c(x_1+x_2)\\
&=(ax_1^3+b_1x_1^2+c_1x_1)+(ax_2^3+bx_2^2+cx_2)\\
&=x_1(ax_1^2+bx_1+c)+x_2(ax_2^2+bx_2+c)\\
&=0.
\end{aligned}$$

例 6 已知两个二次方程 $x^2+ax+b=0$，$x^2+cx+d=0$ 有一个公共根 1，求证：二次方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为 1.

分析 因 1 是方程 $x^2+ax+b=0$ 与 $x^2+cx+d=0$ 的一个公共根，故

$$1^2+a\cdot 1+b=0, \quad ①$$

$$1^2+c\cdot 1+d=0. \quad ②$$

①+②得

$$2+(a+c)+(b+d)=0. \quad ③$$

欲证 1 为方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 的根,只须证明

$$1^2+\frac{a+c}{2}\cdot 1+\frac{b+d}{2}=0. \quad ④$$

比较③,④,显见④成立.

例 7 已知方程

$$x^2-(a+b)x+\frac{1}{2}(a^2+2b^2-2b+1)=0$$

有两个实根,求 a,b 的值.

解 依题意,知

$$\Delta=(a+b)^2-4\times\frac{1}{2}(a^2+2b^2-2b+1)\geqslant 0,$$

即
$$a^2+3b^2-2ab-4b+2\leqslant 0. \quad ①$$

由①得
$$(a-b)^2+2(b-1)^2\leqslant 0. \quad ②$$

由②知 $a=b=1$.

例 8 已知 A,B,C 不全相等,求证:三个二次方程 $Ax^2+2Bx+C=0$, $Bx^2+2Cx+A=0$, $Cx^2+2Ax+B=0$ 不可能都有等根.

分析 考察反面情形.假若三个方程都有等根,则

$$4B^2-4AC=0,$$

$$4C^2-4AB=0,$$

$$4A^2-4BC=0.$$

三式相加可得

$$A^2+B^2+C^2-AC-AB-BC=0,$$

可变为
$$(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2=0.$$

于是 $A=B=C$,与题设相矛盾.故命题成立.

例 9 已知 a,b,c 为正数,且方程

$$c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$$

没有实数根.求证:分别为 a,b,c 的三条线段可组成一个三角形.

分析 依题设,$\Delta<0$,即

$$\begin{aligned}&(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\\=&(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)\\=&[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]\\=&(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)<0.\end{aligned} \quad ①$$

不妨设 $a\geqslant b>0$,$a\geqslant c>0$,则 $a+c>b$,$a+b>c$,$a+b+c>0$,故由①可得 $b+c>a$.由此可见,分别长为 a,b,c 的三条线段中,任意两条线段之和大于第三条线段,它们可以组成一个三角形.

练 习 一

一、填空题

1.若 $b=a+c$,则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个实数根是________.

2.若 m 是一元二次方程 $ax^2+bx+a=0$ 的一个根,则方程的另一个根是________.

3.已知关于 x 的一元二次方程

$$x^2+2(m+1)x+(3m^2+4mn+4n^2+2)=0$$

有实数根,则 $3m^2+2n^2=$________.

4.如果 m,n 都是正数,方程 $x^2+mx+2n=0$ 和方程 $x^2+2nx+m=0$ 都有实数根,则 $m+n$ 的最小值是________.

二、解答题

5.解方程:

(1)$x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{2}x+\sqrt{6}=0$;

(2)$(1+\sqrt{2})x^2-(3+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$;

(3)$(7-4\sqrt{3})x^2-(2-\sqrt{3})x-2=0$.

6. 证明方程$(x-\alpha)(x-\beta)=1$有两个不相等的实数根.

7. 若关于 x 的方程

$$x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$$

有实数根,求 a、b 的值.

8. 已知 $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. 求证:方程 $x^2+p_1x+q_1=0$ 与 $x^2+p_2x+q_2=0$ 中至少有一个方程有实数根.

9. 当 $a>0$ 且 $b>a+c$ 时,试证方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不同的实数根.

10. 已知 $a-b+c=0$,求证 $b^2\geqslant 4ac$.

11. 解方程

$$(m^2-n^2)x^2-4mnx=m^2-n^2.$$

12. 已知 $x+y+z=0$, $xyz=1$,求证:x,y,z 中必有一个大于$\frac{3}{2}$.

第二讲　韦达定理

知识点和方法述要

1. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为 x_1, x_2，则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$. 这种一元二次方程的根与系数的关系，称作韦达定理.

韦达定理的逆定理是：如果 x_1, x_2 满足 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$，那么 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

2. 有关一元二次方程、韦达定理的应用十分广泛：可用于判断一元二次方程实根的符号；可用于已知方程及方程的一根求另一根；可用于求作以两已知数为根的方程；可用于求与一元二次方程的根有关的某些代数式的值等. 其中不解方程求与两根有关的某些代数式的值常用到下面一些关系式：

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2;$$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2;$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2};$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2};$$

$$\begin{aligned}x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)\\&=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2].\end{aligned}$$

3. 利用判别式和韦达定理可判定一元二次方程实数根的符号：对于方程 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$，

$\Delta\geqslant0, \frac{c}{a}>0, \frac{b}{a}<0\Rightarrow$ 方程有两正根；

$\Delta \geqslant 0, \frac{c}{a} > 0, \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow$方程有两负根；

$\Delta > 0, \frac{c}{a} < 0$ 或 $ac < 0 \Rightarrow$方程两根异号.

例 题 精 讲

例1 已知关于 x 的二次方程 $2x^2 + ax - 2a + 1 = 0$ 的两个实根的平方和为 $7\frac{1}{4}$，求 a 的值.

分析 设方程的两实根分别为 x_1, x_2. 根据韦达定理，有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a}{2}, \\ x_1 x_2 = \frac{-2a+1}{2}. \end{cases}$$

于是，

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$
$$= (-\frac{a}{2})^2 - 2 \cdot \frac{-2a+1}{2} = \frac{1}{4}(a^2 + 8a - 4).$$

依题设，得

$$\frac{1}{4}(a^2 + 8a - 4) = 7\frac{1}{4}.$$

解得 $a = -11$ 或 3.

注意到 x_1, x_2 为题设方程的两个实数根，故须满足 $\Delta \geqslant 0$. 但 $a = -11$ 时，

$$\Delta = (-11)^2 + 16 \times (-11) - 8 < 0,$$

$a = 3$ 时，$\Delta > 0$. 故 $a = 3$.

例2 设方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别比方程 $x^2 + 2qx + \frac{1}{2}p = 0$ 的两根大 1，且方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根之差与方程 $x^2 + 2qx + \frac{1}{2}p = 0$ 的两根之差相等，求这两个方程的解.

解 设方程 $x^2+2qx+\frac{1}{2}p=0$ 的两根为 α,β，则方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为 $\alpha+1,\beta+1$. 根据韦达定理得

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2q & ① \\ \alpha\beta=\frac{1}{2}p, & ② \\ (\alpha+1)+(\beta+1)=-p, & ③ \\ (\alpha+1)(\beta+1)=q. & ④ \end{cases}$$

由②,③得 $\qquad 2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0.$ ⑤

由①,④得 $\qquad 2\alpha\beta+3(\alpha+\beta)+2=0.$ ⑥

由⑤,⑥得 $\qquad \alpha+\beta=0,\alpha\beta=-1.$

故 α,β 的值分别为 $1,-1$ 或 $-1,1$. 进而得方程 $x^2+px+q=0$ 的解为 $0,2$；方程 $x^2+2qx+\frac{1}{2}p=0$ 的解为 ±1.

例3 已知 α,β 是方程 $x^2-7x+8=0$ 的两根，且 $\alpha>\beta$. 不解方程，求 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2$ 的值.

解 根据韦达定理，可得 $\alpha+\beta=7,\alpha\beta=8$. 于是

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=7^2-2\times8=33,$$

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=7^2-4\times8=17.$$

又 $\alpha>\beta$，故 $\alpha-\beta=\sqrt{17}$.

令 $A=\frac{2}{\alpha}+3\beta^2,B=\frac{2}{\beta}+3\alpha^2$，则

$$\begin{aligned} A+B&=\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+3(\alpha^2+\beta^2)=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+3(\alpha^2+\beta^2)\\ &=\frac{2\times7}{8}+3\times33=\frac{403}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A-B&=\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}+3\beta^2-3\alpha^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{2\beta}+3(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)\\ &=(\beta-\alpha)[\frac{2}{\alpha\beta}+3(\beta+\alpha)]=-\sqrt{17}(\frac{2}{8}+3\times7)\\ &=-\frac{85\sqrt{17}}{4}.\end{aligned}$$

两式相加,整理得 $A=\frac{1}{8}(403-85\sqrt{17})$.

例4 求证:方程 $(x-a)(x-a-b)=1$ 有两个实数根,并且其中一个大于 a,另一个小于 a.

分析 证明方程存在两不等实根并不困难,难在直接证明两根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 满足 $x_1<a,x_2>a$.为此,尝试转化:将 x_1-a,x_2-a 与0进行大小比较.令 $x-a=y$,原方程可变为

$$y(y-b)=1,$$

即
$$y^2-by-1=0. \qquad ①$$

因
$$\Delta=b^2-4\cdot(-1)=b^2+4>0,$$

故方程①有两个不等实根 y_1,y_2,根据韦达定理 $y_1y_2<0$.不妨设 $y_1<y_2$,于是 $x_1-a=y_1<0,x_2-a=y_2>0$,即 $x_1<a,x_2>a$,原方程存在两不相等的实数根,其一小于 a,另一根则大于 a.

例5 若 $a^2+3a+1=0,b^2+3b+1=0$,求 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 的值.

解 若 $a=b$,则由题设知 $a=b=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$,此时 $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2$.

若 $a\neq b$,依题设可知 a,b 是方程 $x^2+3x+1=0$ 的两根,根据韦达定理可得 $a+b=-3,ab=1$,于是

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{b^2+a^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{(-3)^2-2\times1}{1}=7.$$

例6 已知 $a=6-b,c^2=ab-9$.求证:$a=b$.

证明 依题设,有

$$\begin{cases}a+b=6,\\ ab=c^2+9.\end{cases}$$

根据韦达定理的逆定理知,以 a,b 为实数根的关于 x 的一元二次方程为

$$x^2-7x+c^2+9=0, \qquad ①$$

此时
$$\Delta=6^2-4(c^2+9)=-4c^2\geqslant0.$$

故 $c=0$,且 $\Delta=0$.这表明方程①有相等的根,故 $a=b$.

例 7 已知 p,q,r 都是正数，求证：关于 x 的三个方程：$x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$，$x^2-\sqrt{q}x+\frac{r}{8}=0$，$x^2-\sqrt{r}+\frac{p}{8}=0$ 中至少有一个方程有两个不等的正实数根.

分析 先退一步，从反面考虑：假设三个方程都没有不等实数根，则

$$\begin{cases}\Delta_1=p-\dfrac{q}{2}\leqslant 0, & ①\\[2ex] \Delta_2=q-\dfrac{r}{2}\leqslant 0, & ②\\[2ex] \Delta_3=r-\dfrac{p}{2}\leqslant 0. & ③\end{cases}$$

三式相加，得

$$\frac{1}{2}(p+q+r)\leqslant 0,$$

与 p,q,r 为正数矛盾. 故其中必有一个方程有不相等的实数根.

不妨设方程 $x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$ 的两根为 x_1,x_2，根据韦达定理，有 $x_1\cdot x_2=\frac{q}{8}>0$，表明 x_1,x_2 同号. 又 $x_1+x_2=\sqrt{p}>0$，所以 x_1,x_2 均大于 0.

综上所述，至少存在一个方程有两不相等的正根.

例 8 定义：如果一个关于 x 的多项式经过合并同类项和按降幂(或升幂)排列后，相邻两项的符号相反，我们就说多项式在这两项间出现了一次符号变更. 例如，在多项式 $x^6-x^5+2x^4+x^2-1$ 中出现三次符号变更：在第一、二项之间；在第二、三项之间；在第四、五项之间.

定理：在关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+c=0$(a、b、c 是实数，$a\neq 0$)的左边：

(1)如果没有符号变更，则该方程没有正根；

(2)如果有一次符号变更,则该方程有一个正根;

(3)如果有两次符号变更,则该方程没有正根或有两个正根.

请你证明这个定理.

证明 不妨设 $a>0$,

(1)假设方程有正根 $t>0$,则

$$at^2+bt+c=0. \qquad ①$$

因为没有符号变更,则 $b\geqslant 0, c\geqslant 0$,有 $at^2+bt+c>0$,与①矛盾,所以方程没有正根.

(2)显然 $c\leqslant 0$.否则,若 $c>0$,当 $b\geqslant 0$ 时,没有符号变更;当 $b<0$ 时有两次符号变更与题设矛盾.

若 $c=0$,则 $b<0$,方程变为 $ax^2+bx=0$,有 $x_1=0, x_2=-\dfrac{b}{a}>0$.即此时方程有一零根和一正根.

若 $c<0$,则$\dfrac{c}{a}<0$,此时方程有一正一负根.

故有一次符号变更,则该方程有一个正根.

(3)假设方程有一正根,则另一根为0或负根,有

$$\frac{c}{a}=x_1x_2\leqslant 0.$$

因此 $c\leqslant 0$,与有两次符号变更时 $b<0, c>0$ 矛盾.所以有两次符号变更时,该方程没有正根或有两个正根.

例9 已知 ΔABC 的边长分别为 a,b,c,且 $a>b>c$,$2b=a+c$,b 为正整数.若 $a^2+b^2+c^2=84$,求 b 的值.

解 依题设,有

$$a+c=2b, \qquad ①$$

$$a^2+b^2+c^2=84. \qquad ②$$

②可变为

$$(a+c)^2-2ac=84-c^2-b^2. \qquad ③$$

①代入③得

$$ac=\frac{5b^2-84}{2}. \qquad ④$$

根据韦达定理的逆定理，由①，④可知 a,c 是关于 x 的一元二次方程

$$x^2-2bx+\frac{5b^2-84}{2}=0$$

的两个不相等的正实数根.

注意到 b 为正整数且

$$\begin{cases}\Delta=4b^2-4\times\frac{5b^2-84}{2}>0,\\ \frac{5b^2-84}{2}>0.\end{cases}$$

可得 $16\leqslant b^2\leqslant 28$，故 $b=5$.

练 习 二

一、填空题

1. 若方程 $(m+3)x^2-2mx+m-1=0$ 有一正根、一负根，且负根的绝对值较大，则整数 m 的值为________.

2. 已知方程 $x^2+5x+k=0$ 的两根之差为 3，则 $k=$________.

3. 已知方程 $x^2-(k+1)x+k+2=0$ 的两个实数根的平方和等于 6，则 $k=$________.

4. 若方程 $x^2-2ax+4a-3=0$ 的两根均大于 1，则 a 的取值范围是________.

5. 若方程 $3x^2+(k-4)x+k-4=0$ 的两个根互为相反数，则 k $=$________.

6. 已知 $a^2+2a-1=0$，$b^4-2b^2-1=0$，且 $1-ab^2\neq 0$，则 $\left(\frac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{2001}$ 的值为________.

二、解答题

7. 设 a,b 是方程 $x^2+px+1=0$ 的两根，c,d 是方程 x^2+qx+1

$=0$ 的两根.求证:$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=q^2-p^2$.

8.已知关于 x 的方程 $x^2-ax+a=0$ 有二实数根 α,β.求证:$\alpha^2+\beta^2\geqslant 2(\alpha+\beta)$.

9.已知方程 $x^2+bx+c=0$ 与 $x^2+cx+b=0$ 分别各有两实数根 x_1,x_2 与 x_1',x_2',且 $x_1x_2>0,x_1'x_2'>0$.求证:

(1)x_1,x_2,x_1',x_2' 均为负数;

(2)$b-1\leqslant c\leqslant b+1$.

10.若 α,β 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两根,也是方程 $x^6-px^2+q=0$ 的两根,试求 p,q 的值.

11.设 a,b 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的两个根,c,d 是方程 $x^2-4x+2=0$ 的两个根,且

$$B=\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c},$$

求证:

(1)$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c}=7B-7$;

(2)$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}=49B-68$.

12.已知 $\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$,证明:$b+c=2a$.

第三讲　整系数一元二次方程

知识点和方法述要

1. 只要将方程两边同乘以一个适当的数，有理系数方程都可以转化为整系数方程，因此，我们常将有理系数一元二次方程转化为整系数一元二次方程.

2. 整数根的问题是有关整系数一元二次方程的一个重点. 常需要多角度、全面地思考问题，灵活地运用方程的判别式、韦达定理以及整数的各种性质.

例题精讲

例1　若 m,n 为有理数，$\sqrt{n}$是无理数，$m+\sqrt{n}$是有理系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根. 证明 $m-\sqrt{n}$ 也是这个方程的一个根.

证明　因 $m+\sqrt{n}$是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，故

$$a(m+\sqrt{n})^2+b(m+\sqrt{n})+c=0,$$

即

$$(am^2+an+bm+c)+(2am+b)\sqrt{n}=0.$$

由于 a,b,c,m,n 都是有理数，$\sqrt{n}$是无理数，故

$$\begin{cases}am^2+an+bm+c=0,\\2am+b=0.\end{cases}$$

进而可得

$$\begin{aligned}&a(m-\sqrt{n})^2+b(m-\sqrt{n})+c\\=&(am^2+an+bm+c)-(2am+b)\sqrt{n}\\=&0,\end{aligned}$$

这表明 $m-\sqrt{n}$ 也是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根.

例 2　已知 n 为正整数时，关于 x 的一元二次方程

$$2x^2-8nx+10x-n^2+35n-76=0 \qquad ②$$

的二根为素数，解此方程.

解　设方程①的二根为 α,β. 根据韦达定理，有

$$\alpha+\beta=-\frac{10-8n}{2}=4n-5.$$

因 α,β 为素数，且 $4n-5$ 为奇数，故 α,β 中必有一个是偶素数 2.

将 2 代人方程①得

$$2\times2^2-8n\times2+10\times2-n^2+35n-76=0,$$

即

$$n^2-19n+48=0.$$

解之，得 $n_1=16, n_2=3$.

当 $n_1=16$ 时，①变为 $x^2-59x+114=0$，解得 $x_1=2, x_2=57$；当 $n_2=3$ 时，①变为 $x^2-7x+10=0$，解得 $x_1=2, x_2=5$.

例 3　设 m 为整数，且 $4<m<40$，方程

$$x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0 \qquad ①$$

有两个整数根，求 m 的值及方程的根.

解　设方程①的两个根为 x_1, x_2，则

$$x_{1,2}=2m-3\pm\sqrt{2m+1}.$$

m 是整数，x_1, x_2 为整数根，因此 $2m+1$ 为完全平方数. 注意到 $4<m<40$，即 $9<2m+1<81$，且 $2m+1$ 为奇数，故 $2m+1=5^2$ 或 7^2. 解得 $m=12$ 或 24.

当 $m=12$ 时，方程①的根为 $x_1=16, x_2=26$；

当 $m=24$ 时，方程①的根为 $x_1=38, x_2=52$.

例 4　设 $y=ax^2+bx+c$，且 $x=1$ 时，$y=0$；$x=-1$ 时，y 为偶数. 求证：方程

$$x^2-(a+b+c)x+ab+bc=0 \qquad ①$$

有两个整数根.

证明 方程①可变为

$$(x-b)(x-a-c)=0,$$

故 $x_1=b, x_2=a+c$.

依题设,可知 $a+b+c=0, a-b+c$ 为偶数,故 $2b$ 为偶数,$2(a+c)$为偶数,即 $b, a+c$ 都是整数,所以原方程有两个整数根.

例5 若 k 为正整数,一元二次方程$(k-1)x^2-px+k=0$有两个正整数根,求 $k^{kp}(p^p+k^k)+p^k+k^k$ 之值.

解 因为 k 是正整数,方程$(k-1)x^2-px+k=0$是一元二次方程,所以 $k-1\neq 0$,因此 $k\geqslant 2$.

设方程的两个正整数根为 x_1 和 x_2,由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p}{k-1}, & ① \\ x_1x_2=\dfrac{k}{k-1}. & ② \end{cases}$$

由②得
$$x_1x_2=1+\frac{1}{k-1}. \quad ③$$

由于 x_1, x_2 是整数,所以$\dfrac{1}{k-1}$是整数,又 $k\geqslant 2$,所以 $k-1=1$,即 $k=2$.代入③得 $x_1x_2=2$.可知正整数 x_1 与 x_2 只能一个为1,另一个为2,代入①得 $p=3$.所以

$$\begin{aligned} & k^{kp}(p^p+k^k)+p^k+k^k \\ = & 2^{2\times 3}(3^3+2^2)+3^2+2^2=1997. \end{aligned}$$

例6 设 $x^2+qx-1=0$ 的二个根分别是方程 $x^2+px-1=0$ 的两个根的五次方,p 为正整数.试证明 p, q 不可能都是素数.

分析 若 $p=1$,则 p 不是素数,命题成立.

若 $p>1$,则 p 为素数或合数.设 α, β 为方程 $x^2+px-1=0$ 的两个根,依题设,α^5, β^5 是方程 $x^2+qx-1=0$ 的两个根,根据韦达定理,有

$$\alpha+\beta=-p,$$
$$\alpha\beta=-1,$$

$$\alpha^5+\beta^5=-q,$$
$$\alpha^5\cdot\beta^5=-1,$$
且
$$\alpha^2=1-p\alpha,$$
$$\beta^2=1-p\beta.$$
于是,可得
$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5&=\alpha\cdot\alpha^4+\beta\cdot\beta^4\\&=\alpha(1-p\alpha)^2+\beta(1-p\beta)^2\\&=(\alpha+\beta)-2p(\alpha^2+\beta^2)+p^2(\alpha^3+\beta^3)\\&=(\alpha+\beta)-2p[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]+p^2[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta(\alpha+\beta)],\end{aligned}$$
进而,有
$$-q=-p-2p(p^2+2)+p^2(p^3-3p),$$
化简得
$$q=p(p^2+5p^2+5),$$
可知 q 为合数.

例 7 已知 k 为正整数,关于 x 的二次方程
$$x^2+x+10=k(k-1)$$
有一个正整数根,试求此整数根及 k 的值.

解 原方程可变为
$$x^2+x+10-k(k-1)=0, \qquad ①$$
则
$$\Delta=1-4[10-k(k-1)]=(2k-1)^2-40.$$
因方程①的一个根为整数根,故 Δ 是一平方数,设
$$(2k-1)^2-40=m^2 \qquad ②$$
$(m>0)$,则②可变为
$$(2k-1)^2-m^2=40,$$
即
$$(2k-1+m)(2k-1-m)=40.$$

注意到 $2k-1+m,2k-1-m$ 只能是具有相同奇偶性的正整数,且

$40=1\times40=2\times20=4\times10=5\times8,$

$2k-1+m>2k-1-m,$

故
$$\begin{cases}2k-1+m=20,\\2k-1-m=2;\end{cases}$$
或
$$\begin{cases}2k-1+m=10,\\2k-1-m=4.\end{cases}$$
解之，得$\begin{cases}k=6\\m=9\end{cases}$或$\begin{cases}k=4\\m=3\end{cases}$. 分别代入原方程，得正整数根分别为4，1.

所以，当$k=6$时，方程的正整数根为4；当$k=4$时，方程的正整数根为1.

例8 设p是不大于100的整数，试求方程$x^2-px+2^{10}=0$的正整数解与p的值.

分析 首先，$\Delta=p^2-4\cdot2^{10}\geqslant0$，可得$|p|\geqslant64$. 设$\alpha$为方程一正整数根，根据韦达定理可知方程的另一根$\beta$也为正整数根，$p$为正整数，所以$p\geqslant64$. 又由$\alpha\beta=2^{10}$知$\alpha,\beta$均为2的非负整数幂，不妨设$\alpha=2^s,\beta=2^t$（$s,t$均为非负整数，$s\leqslant t$），则$2^t\leqslant100$，即$t\leqslant6$，于是$s\geqslant4$.

当$t=6$时，$s=4,\alpha=2^4=16,\beta=2^6=64$，此时$p=80$；

当$t=5$时，$s=5,\alpha=\beta=2^5=32$，此时$p=64$.

例9 求使x的方程$(a+1)x^2-(a^2+1)x+2a^3-6=0$有整数根的所有整数$a$.

解 (1)当$a=-1$时，原方程化成$-2x-8=0$，有整数根$x=-4$.

(2)当$a\neq-1$时，
$$\begin{aligned}\Delta&=[-(a^2+1)]^2-4(a+1)(2a^3-6)\\&=-7a^4-8a^3+2a^2+24a+25.\end{aligned}$$
当$a\geqslant2$时
$$\begin{aligned}\Delta&=-(7a^2+8a-2)a^2+24a+25\\&\leqslant-42a^2+24a+25\leqslant-84a+24a+25\\&=-60a+25<0.\end{aligned}$$
当$a\leqslant-2$时

$$
\begin{aligned}
\Delta &= -(7a^2+8a-2)a^2+24a+25\\
&= -(7|a|^2-8|a|-2)|a|^2-24|a|+25\\
&= -[14|a|-8|a|-2]|a|^2-24|a|+25\\
&\leqslant -[6|a|-2]|a|^2-24|a|+25\\
&\leqslant -10|a|^2-24|a|+25<0.
\end{aligned}
$$

故已知二次方程有整数根，a 必须满足 $-1\leqslant a\leqslant 1$. 所以 $a=0$ 或 1.

当 $a=0$ 时，原方程化为 $x^2-x-6=0$, $x_1=-2$, $x_2=3$.

当 $a=1$ 时，原方程化为 $2x^2-2x-4=0$, $x_1=-1$, $x_2=2$.

综合上述，a 为 $-1,0,1$.

练 习 三

一、填空题

1. 关于 x 的整系数方程 $x^2+ax+b=0$ 的一个根是 $2-\sqrt{3}$，则 $a+b=$ ________.

2. 方程 $(x-a)(x-8)-1=0$ 有两个整数根，则 $a=$ ________.

3. 若 p,q 都是正整数，关于 x 的方程 $\frac{1}{2}px^2-\frac{1}{2}qx+1993=0$ 的两根都是素数，则 $2p+q=$ ________.

4. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根为非零整数，$p+q=198$，则 $p=$ ________.

二、解答题

5. 已知二次方程 $x^2-px+q=0$ 有两个整数根，如果 c 是这两个根的公约数，试证 c 也是 p,q 的公约数.

6. 证明方程 $x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$（$p,q,r$ 为有理数）的根为有理数.

7. 对于任一有理数 m，问 k 为何值时，方程

$$x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$$

的根总为有理数?

8. 设 a,b 为任意给定的整数,试证明方程 $x^2+10ax+5b+3=0$ 和 $x^2+10ax+5b-3=0$ 都没有整数根.

9. 若方程 $x^2+2px+2q=0$ 有实数根,且 q 为奇数.求证此方程必有两个无理根.

10. 求所有的实数 k,使方程 $kx^2+(k+1)x+(k-1)=0$ 的根都是整数.

11. 设 m,n 为正整数.二次方程 $4x^2+mx+n=0$ 有相异实数根 p,q,且 $p<q$,如果方程 $x^2-px+2q=0$ 和 $x^2-qx+2p=0$ 有公共根.

(1)求它的公共根;

(2)求 m,n 的一切正整数对 (m,n);

(3)若 p,q 均为有理数时,求方程 $x^2-px+2q=0$ 的另一根.

12. 一直角三角形的两直角边长均为整数,且为方程 $x^2-(m+2)x+4m=0$ 的根,试求 m 的值及该直角三角形的边长.

第四讲 可化归为一元二次方程的方程(组)(一)

知识点和方法述要

1. 通过因式分解、换元等方法可将某些特殊的高次方程化归为二次方程求解. 观察分析方程的结构特征,灵活地变形是实现化归的前提.

2. 由一个二元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组均可用代入法求解. 若两个二元二次方程中的一个可分解为两个一次方程,则可化归为前面一种情形.

对于两个二元二次方程组成的方程组,若二次项系数对应成比例,则可加、减消元,得到一个二元一次方程再与其中一个二元二次方程联立;若某一未知元对应项的系数成比例,则可利用加、减消元,得到一个一元二次方程,先求出另一未知元;若非二次项成比例,则可利用加、减消去非二次项,得到一可分解的二元二次方程(否则无解).

一般地,解二元二次方程组时,应先把方程写成 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 形式,对齐同次项,以利于观察、比较、分析. 解题的基本思想是消元、降次、化归.

例题精讲

例1 解下列方程:

(1)$(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$;

(2)$(2x^2-3x+1)^2=22x^2-33x+1$.

解 (1) 原方程可变为

$$(1-x^2)^2-4x(1-x^2)+4x^2=0,$$

即
$$[(1-x^2)-2x]^2=0,$$

所以
$$x^2+2x-1=0,$$

解得 $x_1=-1+\sqrt{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2}$.

(2)原方程可变为

$$(2x^2-3x+1)^2-11(2x^2-3x+1)+10=0,$$

即
$$[(2x^2-3x+1)-1][(2x^2-3x+1)-10]=0,$$

所以
$$(2x^2-3x)(2x+2-3x-9)=0,$$

即
$$x(2x-3)(2x+3)(x-3)=0,$$

故原方程的解为 $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=0$, $x_3=\frac{3}{2}$, $x_4=3$.

例 2 解下列方程:

(1)$(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;

(2)$(x^2+x-2)^2+(2x^2-5x+3)^2=(3x^2-4x+1)^2$.

解 (1)设 $x^2+x+1=y$,则原方程可变为

$$y(y+1)=12,$$

即
$$y^2+y-12=0,$$

解得 $y_1=-3$, $y_2=-4$.

由 $y_1=3$ 得 $x^2+x+1=3$,**解得** $x_1=-2$, $x_2=1$;

由 $y_2=4$ 得 $x^2+x+1=-4$,即 $x^2+x+5=0$,此方程无实数根.

综上所述,原方程的根为 $x_1=-2$, $x_2=1$.

(2)令 $A=x^2+x-2$, $B=2x^2-5x+3$,则原方程可变为

$$A^2+B^2=(A+B)^2,$$

化简得
$$AB=0,$$

即
$$(x^2+x-2)(2x^2-5x+3)=0,$$

可变为
$$(x+2)(x-1)(2x-3)(x-1)=0.$$

故原方程的根为 $x_1=-2, x_2=1, x_3=\frac{3}{2}$.

例 3 解方程：$x^4+(x-4)^4=626$.

分析 直接展开求解难以进行，进行平均值代换：$y=\frac{x+(x-4)}{2}=x-2$，原方程可变为

$$(y+2)^4+(y-2)^4=626,$$

再展开，正负相消，有

$$y^4+24y^2-297=0.$$

即
$$(y^2+33)(y^2-9)=0.$$

因 $y^2+33>0$，故 $y^2-9=0$，有 $y=\pm 3$，于是 $x_1=5, x_2=-1$.

深入观察，可发现原方程即

$$x^4+(x-4)^4=5^4+1^4.$$

不难看出 $x=5,-1$ 是方程的根，且是仅有的二个根.

例 4 解方程：$2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$.

解 显然 $x=0$ 不是原方程的根，因此，可将原方程两边同除以 x^2，得

$$2x^2-9x+14-9\cdot\frac{1}{x}+2\cdot\frac{1}{x^2}=0,$$

即
$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0. \quad ①$$

令 $y=x+\frac{1}{x}$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$，故①可变为

$$2y^2-9y+10=0,$$

解得 $y_1=2, y_2=\frac{5}{2}$.

当 $y_1=2$ 时，$x+\frac{1}{x}=2$，解得 $x_1=x_2=1$；

当 $y_2=\frac{5}{2}$ 时，$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$，解得 $x_3=\frac{1}{2}, x_4=2$.

综上所述，原方程的根为 $\frac{1}{2}$，1，2.

注 一个整式方程,按照未知数的降幂排列后,若与首尾两项等距的两项的系数相等,或都互为相反数,这样的方程称作倒数方程.这里所说的首项是指方程的最高次项,尾项是指方程的常数项(缺项要空位).若项数为奇数,中间一项看作是与首尾等距的两项.本例反映了解倒数方程的一种重要方法.

例 5 方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个不同的实数根.求证:方程 $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$ 有 4 个不同的实数根.

分析一 设 x_1、x_2 分别是方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个不同实数根,由韦达定理得
$$\begin{cases} x_1+x_2=-a, \\ x_1x_2=b. \end{cases}$$
则
$$\begin{aligned} & x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1 \\ = & x^4-(x_1+x_2)x^3+(x_1x_2-2)x^2+(x_1+x_2)+1 \\ = & (x^2-1)^2-(x_1+x_2)x(x^2-1)+x_1x_2x^2 \\ = & [(x^2-1)-x_1x][(x^2-1)-x_2xx] \\ = & (x^2-x_1x-1)(x^2-x_2x-1). \end{aligned}$$

方程 $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$ 化为
$$(x^2-x_1x-1)(x^2-x_2x-1)=0.$$

现在只须证明下列方程式的实数根各不相同,对于
$$x^2-x_1x-1=0. \quad ①$$
及
$$x^2-x_2x-1=0. \quad ②$$
由判别式
$$\Delta_1=x_1^2+4>0,$$
$$\Delta_2=x_2^2+4>0,$$
知它们分别有不同的两个实数根,且因 x_1 与 x_2 不相同,故方程①,②的根各不相同.事实上,若方程①,②有相同的根 x_0,则 $x_0^2-x_1x_0-1=0$,$x_0^2-x_2x_0-1=0$,两式相减得 $x_0(x_1-x_2)=0$,显然 $x_0\neq0$,所以 $x_1=x_2$,这与 $x_1\neq x_2$ 矛盾.故原方程有四个不同的实数根.

分析二 显然 $x=0$ 不满足 $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$,即 $x\neq0$,方程两边同时除以 x^2 得

$$x^2+ax+(b-2)-\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

即 $$(x-\frac{1}{x})^2+a(x-\frac{1}{x})+b=0.$$

令 $x-\frac{1}{x}=t$，则 $t^2+at+b=0$. 显然 $t=x_1$，或 $t=x_2$. 所以 $x-\frac{1}{x}=x_1$，或 $x-\frac{1}{x}=x_2$. 即①，②. 以下同分析一.

例6 解下列方程组：

(1) $\begin{cases}3x^2-y^2=8, & ①\\ x^2+xy+y^2=4. & ②\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ x^2-4xy+3y^2=-1.\end{cases}$

分析 (1)方程组中两个方程都没有一次项，考虑先消去常数项.

①－②×2 得 $$x^2-2xy-3y^2=0,$$

即 $$(x-3y)(x+y)=0.$$

于是，原方程组可变为 $\begin{cases}x-3y=0,\\ 3x^2-y^2=8;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=0,\\ 3x^2-y^2=8.\end{cases}$ 解之得

$\begin{cases}x_1=\frac{6\sqrt{13}}{13},\\ y_1=\frac{2\sqrt{13}}{13};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\frac{6\sqrt{13}}{13},\\ y_2=\frac{2\sqrt{13}}{13};\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=2,\\ y_3=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=-2,\\ y_4=2.\end{cases}$

(2)原方程组可变为

$$\begin{cases}(x+y)(x-y)=3, & ③\\ (x-3y)(x-y)=-1. & ④\end{cases}$$

显见 $x\neq y$，③÷④得 $\frac{x+y}{x-3y}=-3$，即 $x=2y$，代入③可得 $x_1=2$，$x_2=-2$，进而分别得 $y_1=1$，$y_2=1$. 原方程的解为 $\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=1;\end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

例 7 解方程组$\begin{cases} x^3+y^3+x^3y^3=7, \\ x+y+xy=5. \end{cases}$

分析 方程组中每个方程都关于 x,y 对称,且出现基本对称式 $x+y,xy$,作整体换元:令 $x+y=u,xy=v$,则原方程组可变为

$$\begin{cases} u+v=5. & ① \\ u^3+v^3-3uv=17. & ② \end{cases}$$

①代入②可得

$$17=u^3+v^3-3uv=(u+v)[(u+v)^2-3uv]-3uv$$

$$5[5^2-3uv]-3uv,$$

即
$$uv=6. \qquad ③$$

由①,③易得$\begin{cases} u_1=3 \\ v_1=2 \end{cases}$或$\begin{cases} u_2=2, \\ v_2=3. \end{cases}$进而得

$$\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases} 或 \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3. \end{cases}$$

解得$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=2. \\ y_2=1. \end{cases}$

例 8 解方程组$\begin{cases} x^3+y^3-18xy=0, \\ x^2+y^2-20x=0. \end{cases}$

分析 注意到 x,y 并不完全对称,且分程组中不含常数项,可尝试设 $y=kx$,显然$\begin{cases} x=0, \\ y=0 \end{cases}$是方程组的一组解.当 $x\neq0$ 时,将 $y=kx$ 代入方程组,可得

$$\begin{cases} x^3+k^3x^3-18kx^2=0, & ① \\ x^2+k^2x^2-20x=0. & ② \end{cases}$$

由①知 $k\neq-1$,否则 $x=0$,矛盾.故由①可得

$$x=\frac{18k}{1+k^3}, \qquad ③$$

由②得 $$x=\frac{20}{1+k^2}.\qquad ④$$

由③,④可得

$$\frac{18k}{1+k^3}=\frac{20}{1+k^2},$$

即 $$k^3-9k+10=0.$$

故 $$(k-2)(k^2+2k-5)=0,$$

所以 $k_1=2,k_2=-1+\sqrt{6},k_3=-1-\sqrt{6}$. 代入④及 $y=kx$ 可得

$\begin{cases}x_1=4,\\y_1=8;\end{cases}\begin{cases}x_2=4+\sqrt{6},\\y_2=2+3\sqrt{6};\end{cases}\begin{cases}x_3=4-\sqrt{6},\\y_3=2-3\sqrt{6}.\end{cases}$

例 9 解方程组

$$\begin{cases}x+y+z=3, & ①\\x^2+y^2+z^2=3, & ②\\x^5+y^5+z^5=3. & ③\end{cases}$$

解 由①得

$$x+y=3-z,\qquad ④$$

由②得 $$(x+y)^2-2xy=3-z^2,\qquad ⑤$$

④代入⑤得 $$xy=z^2-3z+3.\qquad ⑥$$

由④,⑥知 x,y 是关于 m 的方程

$$m^2-(3-z)m+(z^2-3z+3)=0\qquad ⑦$$

的两根,则

$$\Delta=(3-z)^2-4(z^2-3z+3)=-3(z-1)^2\geqslant 0,$$

于是 $z=1,\Delta=0$,进而知 $x=y=1$.

当 $x=y=z=1$ 时,③式成立.故原方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1.\end{cases}$

练 习 四

一、填空题

1. 若两个关于 x 的实系数方程 $x^2+x+a=0$ 与 $x^2+ax+1=0$ 至少有一个公共的实数根. 则 $a=$ ______.

2. 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ y^2=4x \end{cases}$ $(a\neq 0)$的实数解的组数为______.

3. 方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy-z^2=1 \end{cases}$ 的实数解是______.

4. 已知 x,y 是正整数,且

$$\begin{cases} xy+x+y=71, \\ x^2y+xy^2=880, \end{cases}$$

则 $x^2+y^2=$ ______.

二、解答题

5. 解方程组 $\begin{cases} x^2-y^2-x+2=0, \\ x^2-y^2-2y-1=0. \end{cases}$

6. 已知方程组 $\begin{cases} x+\sqrt{3}y=\sqrt{n} \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ 有两组相异的正数解,试求正整数 n 及方程组的解.

7. 解方程 $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

8. 解方程 $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

9. 解方程 $x^3+2\sqrt{3}x^2+3x+\sqrt{3}-1=0$.

10. 关于 a,b,c,d 的方程组

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=d^k, \\ ab+bc+ca=d^k, \\ a+b+c=d, \end{cases}$$

这里 k 是正整数. 当 k 为何值时,该方程组(1)只有一组解;(2)恰有两组解;(3)至少有三组解. 分别在上述三种情况下,解这个方程组.

第五讲　可化归为一元二次方程的方程(组)(二)

知识点和方法述要

1. 某些含绝对值方程、分式方程、无理方程可化归为一元二次方程求解. 在化归过程中,仔细观察方程的结构特征,从全局出发规划解题策略十分重要. 应灵活地运用拆项分组、配方、换元、因式分解等手段,改变方程结构,变繁为易. 实现化归,达到解题目标.

2. 分式方程、无理方程中各个分式、根式中未知数都有各自的取值范围,这些取值的公共部分就是方程未知数允许的取值范围. 只能在这个取值范围中求它的根. 但当分式方程、无理方程转化为整式方程后,就可能出现两种情形:(i)如果整式方程的根都在分式方程、无理方程的未知数取值范围内,那么整式方程的根都是分式方程、无理方程的根;(ii)如果整式方程的根有的不在分式方程、无理方程的取值范围内,则这个根是增根. 因此,在运算过程准确无误的情况下,分式方程、无理方程的验根只须检验这个根是否超出了原方程未知数允许的取值范围。

例题精讲

例 1　解方程 $x|x|-3|x-1|=1$.

解　原方程可变为

$$x|x|=3|x-1|+1.$$

因 $3|x-1|+1>0$,故 $x|x|>0$,可知 $x>0$. 于是①可变为

$$x^2=3|x-1|+1,$$

即

$$x^2-1=3|x-1|. \qquad ②$$

所以 $x^2-1\geqslant 0$，又 $x>0$，所以 $x\geqslant 1$. ②可变为

$$x^2-3(x-1)-1=0,$$

即

$$x^2-3x+2=0.$$

解得 $x_1=1, x_2=2$.

注 通过观察、分析，初步判断出 x 的可能取值范围可导致直接去掉绝对值符号而简化运算.

例 2 解方程 $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$.

解 原方程可变为

$$\frac{(x+1)-2}{x+1}+\frac{(x+4)-8}{x+4}=\frac{(x+2)-4}{x+2}+\frac{(x+3)-6}{x+3},$$

即

$$1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{8}{x+4}=1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3},$$

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3},$$

故

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{x^2+7x+12}$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0.$$

所以 $x=0$ 或 $x^2+3x+2=x^2+7x+12$，解得 $x_1=0, x_2=-\frac{5}{2}$.

经检验，$x_1=0, x_2=-\frac{5}{2}$ 均为原方程的根.

注 1. 本例没有直接去分母，而是通过先分离出整式部分的办法使分式中的分子降次，使原方程得到简化.

2. 通过合理移项，使通分后方程两边的分子相同，直接提取公因式，使方程剩余部分更为简单易解是本例解题中一项重要策略.

例 3 解方程 $x^2+x+1=\frac{2}{x^2+x}$.

解一 设 $x^2+x=y$，则原方程变为 $y+1=\frac{2}{y}$，有 $y^2+y-2=0$，解得 $y_1=-2, y_2=1$.

当 $y_1=-2$ 时，$x^2+x=-2$，此方程无实根.

当 $y_2=1$ 时，$x^2+x=1$，即 $x^2+x-1=0$. 解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，均为原方程的根.

解二 将原方程两边同乘以 (x^2+x)，得

$$(x^2+x)(x^2+x+1)=2,$$

即

$$(x^2+x)^2+(x^2+x)-2=0,$$

$$(x^2+x+2)(x^2+x-1)=0.$$

解 $x^2+x+2=0$，知此方程无实根.

由 $x^2+x-1=0$，得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

检验知 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 为原方程的根.

例 4 解方程 $\frac{13x-x^2}{x+1}\left(x+\frac{13-x}{x+1}\right)=42$.

分析 仔细观察可发现 $\frac{13x-x^2}{x+1}=x\cdot\frac{13-x}{x+1}$. 将 $\frac{13-x}{x+1}$ 看作整体，设为 y，则 $xy\cdot(x+y)=42$. 而 $xy+(x+y)=\frac{13x-x^2}{x+1}+x+\frac{13-x}{x+1}=13$，故可将 xy，$x+y$ 看作一元二次方程 $t^2-13t+42=0$ 的两根，进而解得 $\begin{cases}xy=7,\\x+y=6;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}xy=6,\\x+y=7.\end{cases}$ 以下不难得到 $x_1=3+\sqrt{2}$，$x_2=3-\sqrt{2}$，$x_3=1$，$x_4=6$.

例 5 解方程 $5x^2+x-x\sqrt{5x^2-1}-2=0$.

解 原方程可变为

$$[(5x^2-1)-1]+(x-x\sqrt{5x^2-1})=0.$$

即

$$(\sqrt{5x^2-1}+1)(\sqrt{5x^2-1}-1)-x(\sqrt{5x^2-1}-1)=0,$$

$$\Leftrightarrow(\sqrt{5x^2-1}-1)(\sqrt{5x^2-1}+1-x)=0.$$

由 $\sqrt{5x^2-1}-1=0$ 解得 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{5}}$，即 $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

由$\sqrt{5x^2-1}+1-x=0$解得 $x=\frac{1}{2}$,或 $x=-1$.

经检验知 $x=\frac{1}{2}$, $x=-1$ 都是增根,所以原方程的解为 $x=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$.

例 6 解方程$\sqrt[3]{(x+a)^2}+4\sqrt[3]{(x-a)^2}=5\sqrt[3]{x^2-a^2}$ $(a\neq 0)$.

解 注意到$\sqrt[3]{x^2-a^2}\neq 0$,从而原方程可变为

$$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}}+4\sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}}=5. \quad ①$$

令$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}}=y$,则方程①变为 $y+\frac{4}{y}=5$,解得 $y_1=1$, $y_2=4$. 由$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}}=1$,得 $a=0$,这与题设矛盾,故 $y_1=1$ 应舍去.

由$\sqrt[3]{\frac{x+a}{x-a}}=4$,解得 $x=\frac{65}{63}a$.

经检验,$x=\frac{65}{63}a$ 是原方程的解.

例 7 解方程 $\frac{x-7}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{x-5}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{10}$.

解 原方程可变为

$$\frac{(\sqrt{x-3})^2-2^2}{\sqrt{x-3}+2}+\frac{(\sqrt{x-4})^2-1^2}{\sqrt{x-4}+1}=\sqrt{10}.$$

故 $$\sqrt{x-3}-2+\sqrt{x-4}-1=\sqrt{10}.$$

即 $$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}=\sqrt{10}+3. \quad ①$$

于是 $$\frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{x-4}}=\frac{1}{\sqrt{10}+3},$$

即 $$\sqrt{x-3}-\sqrt{x-4}=\sqrt{10}-3. \quad ②$$

①+②可得 $$\sqrt{x-3}=\sqrt{10},$$

所以 $x-3=10$. 即 $x=13$.

经检验,$x=13$ 是原方程的解.

例 8 解方程 $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$.

解 设 $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=y$,则 $x^2y^2=x^2+y^2$.与原方程联立得

$$\begin{cases} x+y=\frac{35}{12}, & ① \\ x^2+y^2=x^2y^2. & ② \end{cases}$$

由①^2 得 $$x^2+2xy+y^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2. \quad ③$$

将②代入③得

$$x^2y^2+2xy-\left(\frac{35}{12}\right)^2=0,$$

解得 $xy=\frac{25}{12}$或 $xy=-\frac{49}{12}$(舍去).$xy=\frac{25}{12}$与①联立可解得 $x=\frac{5}{3}$或 $x=\frac{5}{4}$.

经检验 $x_1=\frac{5}{3}$,$x_2=\frac{5}{4}$为原方程的根.

例 9 解方程 $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

分析 原方程可变为

$$\sqrt{(x-1)-4\sqrt{x-1}+4}+\sqrt{(x-1)-6\sqrt{x-1}+9}=1,$$

即 $$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1.$$

上式在数轴上表示数 $\sqrt{x-1}$ 对应点 A 到数 2,3 对应的点 B、C 的距离之和等于 1,显然点 A 位于线段 BC 上.即 $2\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant3$,解得 $5\leqslant x\leqslant10$.故原方程的解为满足 $5\leqslant x\leqslant10$ 的一切实数.

练 习 五

一、填空题

1. 方程 $x^2-2001|x|=2001$ 的根的和是______.

2. 方程 $|x^2+4x-5|=6-2x$ 的根是______.

3. 方程 $x+\sqrt{x-1}=7$ 的根是______.

4. 方程$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}=6$ 的根是______.

5. 方程$\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=x$ 的根是______.

6. 方程$\sqrt{x+8}+\sqrt{x+3}=\sqrt{3x+6}+\sqrt{3x+1}$的根是______.

二、解答题

7. 解方程$\frac{1}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{10}{3x}$.

8. 解方程$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2-x}=2$.

9. 解方程组$\begin{cases}x+y=-20,\\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+2}=-1.\end{cases}$

10. 设 $a<0$,求证关于 x 的方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+a^2}=0$,

(1)有两个异号实数根;

(2)正根必小于$-\frac{2}{3}a$,负根必大于$-\frac{2}{3}a^2$.

11. 若关于 x 的方程$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+a}=1$ 只有一个整数根,且 $a<30$,试求整数 a 的大小.

12. 解方程:

(1)$\frac{x^3+2}{x^2-x+1}+\frac{x^3-2}{x^2+x+1}=2x$;

(2)$\frac{2x}{3}=\frac{x^2}{12}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}$.

第六讲　一元二次方程的应用

知识点和方法述要

1. 设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二实数根为 x_1,x_2，则二次三项式 ax^2+bx+c 可分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$. 特别地，方程二实数根相等时，二次三项式为 $a(x-x_1)^2$. 要注意 $\Delta<0$ 时二次三项式在实数范围内不能分解因式，不要丢掉两个因式前面的系数 a.

二元二次多项式可整理成关于 x(或 y)的二次三项式进行因式分解.

2. 可利用一元二次方程及可化为一元二次方程的方程如某些分式方程、无理方程解实际应用问题，其步骤与一元一次(分式)方程类似. 注意检验所求根是否符合题意.

例题精讲

例1　把 $3x^2-7xy-6y^2-10x+8y+8$ 分解因式.

解　原式 $=3x^2-(7y+10)x-(6y^2-8y-8)$.

$$\begin{aligned}\Delta&=[-(7y+10)]^2-4\times3\times[-(6y^2-8y-8)]\\&=121y^2+44y+4\\&=(11y+2)^2\geqslant0.\end{aligned}$$

于是　$x_{1,2}=\dfrac{(7y+10)\pm(11y+2)}{2\times3}$，即得 $x_1=3y+2$，$x_2=-\dfrac{2y-4}{3}$.

所以

$$\begin{aligned}\text{原式}&=3(x-3y-2)\left(x+\frac{2y-4}{3}\right)\\&=(x-3y-2)(3x+2y-4).\end{aligned}$$

例2　将一块长 1.8 米、宽 1.2 米的铁皮四角截去相等的四个小正方形，做成一个底面积为 1 平方米的无盖冰箱，小正方形的边长应

是多少米？

解 如图 6－1，设四角截去的小正方形的边长为 x 米，这样底面矩形的长为 $(1.8-2x)$ 米，宽为 $(1.2-2x)$ 米．依题意，得

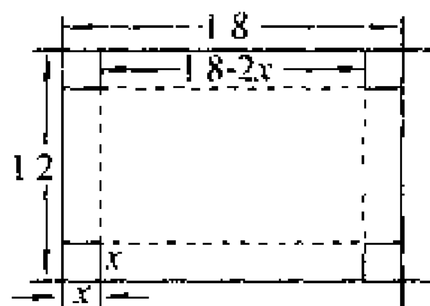


图 6－1

$$(1.8-2x)(1.2-2x)=1,$$

解得 $$x_1=\frac{3+\sqrt{4.36}}{4}\approx 1.272,$$

$$x_2=\frac{3-\sqrt{4.36}}{4}\approx 0.228.$$

由于 $x<\frac{1.2}{2}=0.6$，故 x_1 应舍去．

答 四角截去的小正方形的边长约为 0.228 米．

例 3 （印度古题）有一群蜜蜂，其半数的平方根只飞向茉莉花丛，$\frac{8}{9}$ 留在家里，还有两只去寻找荷花瓣里嗡嗡叫的雄蜂．这两只雄蜂被荷花的香味所吸引，傍晚时由于花瓣合拢，飞不出去了．请告诉我蜂群中有多少只蜜蜂？

分析 为了避免方程中出现根号，可设蜂群中有 $2x^2$ 只蜜蜂．这群蜜蜂可分为三部分：x 只蜜蜂飞向茉莉花丛；$2x^2\times\frac{8}{9}$ 只蜜蜂留在家里；还有两只飞向荷花瓣．由此可列出方程

$$2x^2=x+\frac{16}{9}x^2+2,$$

即 $$2x^2-9x-18=0.$$

解得 $x_1=6$，$x_2=-\frac{3}{2}$（舍去）．于是 $2x^2=72$，即为所求．

例 4 某工厂今年产值为 400 万元，计划两年后产值增加到 900 万元，如果每年的增长率相同，那么该工厂三年的总产值是多少？

解一 设明年的产值为 x 万元，则增长率为 $(\frac{x}{400}-1)$，后年的产值按这样的增长率应为 $x[1+(\frac{x}{400}-1)]$．依题设，有

$$x[1+(\frac{x}{400}-1)]=900.$$

解得 $x_1=600, x_2=-600$（舍去）. 三年总产值为

$$400+600+900=1900\text{（万元）}.$$

解二 设每年的增长率为 x. 依题设，有

$$400(1+x)^2=900.$$

解得 $x_1=\frac{1}{2}=50\%, x_2=-\frac{5}{2}$（舍去）. 三年总产值为

$$400+400(1+50\%)+900=1900\text{（万元）}.$$

例 5 一块场地，用 600 块正方形的砖头铺成，如果把场地的面积扩大到比原面积的 2 倍还多 0.6 平方米，且正方形砖头的边长增加 10 厘米，则需铺 540 块方砖，求原场地的面积.

解 设原场地面积为 xm^2，依题设可得

$$\sqrt{\frac{x}{600}}+0.1=\sqrt{\frac{2x+0.6}{540}},$$

两边平方，整理得

$$\sqrt{6x}=\frac{11}{18}x-\frac{8}{3},$$

即
$$11x-18\sqrt{6}\cdot\sqrt{x}-48=0.$$

解得
$$\sqrt{x}=\frac{9\sqrt{6}\pm 13\sqrt{6}}{11}$$

因 $\sqrt{x}\geqslant 0$，故 $\sqrt{x}=2\sqrt{6}$，即 $x=24$.

答 原场地的面积为 24 平方米.

例 6 某人买 10 米全棉布和 18 米涤纶布共花 120 元，一年后全棉布价格上调，涤纶布价格下浮，全棉布上调的百分数正好与涤纶布下浮的百分数相等. 这时买 10 米全棉布需 72 元，买 18 米涤纶布只需 36 元. 问原来买 10 米全棉布需几元？

解 设原来买 10 米全棉布需 x 元，又设全棉布一年后价格上调 $y\%$. 依题设，有

$$x(1+y\%)=72, \quad ①$$

$$(120-x)(1-y\%)=36. \quad ②$$

由①,②可得

$$\frac{72}{x}+\frac{36}{120-x}=2. \quad ③$$

③可变为

$$x^2-138x+4320=0.$$

解得 $x_1=48, x_2=90$(舍去).

答　原来买 10 米全棉布需 48 元.

例 7　A、B 两港在大湖两岸，C 港在大湖北岸，A、B、C 三港恰成一等边三角形的三个顶点. A 港甲船与 B 港乙船同时出发都沿直线向 C 港匀速行驶，当乙船行驶出 40 千米时，甲、乙两船与 C 港位置恰是一个直角三角形的三个顶点；而当甲船行驶达 C 港时，乙船尚距 C 港 20 千米. 问：A、B 两港之间距离是多少千米？

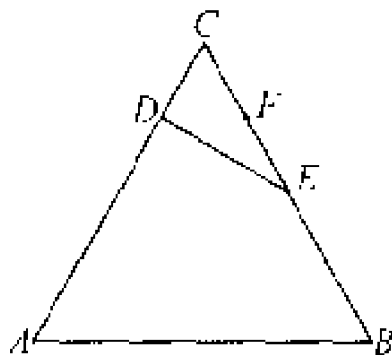


图 6－2

解　如图 6－2 所示，A、B、C 三港成一等边三角形三个顶点，边长等于 x 千米，A 港甲船、B 港乙船同时出发后，当乙行 40 千米到 E 时，甲船到 D，当甲船到 C 时，乙船到距 C 港 20 千米的 F 点，可见甲船速快，$\angle CDE=90°$. 于是 $CD=\frac{1}{2}CE=\frac{1}{2}(x-40)$，$AD=x-\frac{1}{2}(x-40)=\frac{1}{2}(x+40)$，$BF=x-20$，设甲、乙两船的船速分别为 v_1，v_2，则 $\frac{AD}{v_1}=\frac{BE}{v_2}$，$\frac{AC}{v_1}=\frac{BF}{v_2}$，于是 $\frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BF}$，有

$$\frac{\frac{1}{2}(x+40)}{x}=\frac{40}{x-20},$$

可变为

$$x^2-60x-800=0.$$

解得 $x_1=30+10\sqrt{17}$，$x_2=30-10\sqrt{17}$(舍去).

答　A、B 两港之间的距离是 $30+10\sqrt{17}$ 千米.

例 8 甲乙二人同时从圆形跑道上同一点出发，沿顺时针方向跑步，甲的速度比乙快．过了一段时间，甲第一次从背后追上乙，这时甲立即改变方向，沿逆时针方向以原来的速度跑去，当二人再次相遇时，乙恰好跑了 4 圈．求甲的速度是乙的几倍？

分析 设乙的速度为 v，甲的速度为 $kv(k>1)$，跑道一圈的长度为 S，则第一次相遇时花去的时间为 $\frac{S}{kv-v}$，第一次相遇到第二次相遇时花去的时间为 $\frac{S}{kv+v}$．依题设，有

$$\left(\frac{S}{kv-v}+\frac{S}{kv+v}\right)v=4S,$$

即
$$\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k+1}=4. \qquad ①$$

由①可得
$$2k^2-k-2=0.$$

解得 $k_1=\frac{1+\sqrt{17}}{4}$，$k_2=\frac{1-\sqrt{17}}{4}$（舍去）．

答 甲的速度是乙的速度的 $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$ 倍．

例 9 某顾客有 10 元钱，第一次在商店买 x 件小商品花去 y 元，第二次再去买该小商品时，发现每一打（12 件）降价 0.8 元．他比第一次多买了 10 件，花去 2 元．问他第一次买的小商品是多少件？（设 x,y 为正整数．）

解 依题设，有

$$\frac{y}{x}-\frac{2}{x+10}=\frac{0.8}{12}. \qquad ①$$

由①得 $x^2+(40-15y)x-150y=0$.

$\Delta=(40-15y)^2+600y=25(9y^2-24y+64)$

为平方数．设 $9y^2-24y+64=n^2$，则

$$(3y-4)^2+48=n^2. \qquad ②$$

因 $1\leqslant y\leqslant 10$，且 y 为正整数，经验证，$y=1$ 或 5 满足②式．此时 $x=5$ 或 50（仅取正值）．

答　顾客第一次购买该商品数量为5件或50件.

练　习　六

1. 将下列各式在实数范围内因式分解：

(1) $4x^2+8x-1$；

(2) $4x^2-5\sqrt{5}x+5$；

(3) $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$.

2. 当 m 为何时值，$6x^2-xy-2y^2+my-6$ 能分解成两个一次因式的乘积？

3. A、B 两地相距20公里，甲、乙两人同时从 A 地出发步行到 B 地，甲比乙每小时多走1公里，结果比乙早到1小时，甲、乙每小时各走多少公里？

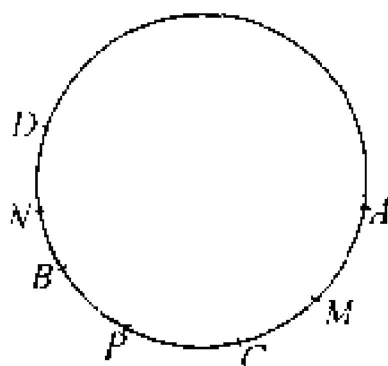
4. 一位乘客坐火车行驶30公里，下车后在车站停留20分钟，再搭车返回，车速比去的车每小时快3公里，整个旅行费时 $2\frac{4}{9}$ 小时，求往返火车的速度.

5. 两个农妇一共带有100个鸡蛋上市场，两人所带蛋数不同，但是卖得的钱数一样. 于是，第一个农妇对第二个说："如果你的鸡蛋换给我，我可以卖得15个铜板."第二个农妇答道："但是你的鸡蛋如果换给我，我就只能卖得 $6\frac{2}{3}$ 个铜板."试问，这两个农妇各有多少个鸡蛋？

6. 一个容器盛满纯酒精20升，第一次倒出若干升后用水加满，第二次又倒出同样多的升数再用水加满，这时容器内剩下的酒精为18.05升. 问每次倒出的液体多少升？

7. 如图，在周长为300cm的圆周上有甲、乙两球，以大小不等的速度作匀速圆周运动，甲球从 A 点出发，按顺时针方向运动，乙球同时从 B 点出发，按逆时针方向运动，两球相遇于 C 点. 相遇后，两球各自反向作匀速圆周运动，但返回时甲球速度是原来的2倍，乙球速

度是原来的一半，它们第二次相遇于 D 点（如图）．已知 $\overset{\frown}{AMC}=40\text{cm}$，$\overset{\frown}{BND}=20\text{cm}$，求 $\overset{\frown}{ACB}$ 的长度．



（第 8 题）

8. 甲容器里有纯酒精 8 克，乙容器里有水 10 克，两容器均未盛满．今把甲容器的酒精倒入乙容器若干克，再把乙容器中的混合液倒回甲容器一部分，这部分是从甲容器倒入乙容器克数的 2 倍，这时，甲容器中的酒精溶液的浓度为 60%．问从甲容器中倒入乙容器的酒精是多少克？

9. 某甲从西村到东村，某乙从东村到西村同时出发，途中相遇时，甲比乙多走 40 公里，甲继续走 2 小时到东村，乙继续走 8 小时到西村．求两村的距离和各人的速度．

10. A、B 两地间道路的一部分是上坡路，其余部分是下坡路，自行车在 1 小时内，下坡比上坡多走 6 公里．已知这辆自行车从 A 到 B 需要 2 小时 40 分钟，而从 B 回到 A 可少用 20 分钟．如果全路长 36 公里，求自行车上坡和下坡的速度，以及上坡路和下坡路的长．

11. 木排从 A 地顺流而下到达河口，在河口由拖轮拖带沿河行驶到达 B 地，共用去 $17\frac{1}{8}$ 昼夜．已知拖轮从 A 到 B 航行一次（不拖带）需要 61 小时，而从 B 到 A 需要 79 小时，拖轮在拖带木排时它的速度是不拖带的速度的一半．拖轮拖带木排从河口到达 B 地所用的时间是多少？

第七讲 函 数

知识点和方法述要

1. 数轴上的点与实数是一一对应的，在平面内确定直角坐标系之后，平面内的点与有序实数对建立一一对应关系，都将“数”与“形”密切联系在一起.

若 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则两点间线段长记作 $|P_1P_2|$，有

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_1-y_2)^2}. \qquad ①$$

①又称作两点间距离公式.

2. 设在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说 x 是自变量，y 是 x 的函数. 自变量 x 与函数 y 的每一对对应值都对应坐标平面内的一个点，所有这些点就构成了函数的图象. 函数的表示方法最常用的有解析法、列表法和图象法，但注意不是所有的函数都具有这三种表达方式. 自变量的取值范围一般取决于解析式本身的限制，如分式的分母取值不为零，偶次根式的被开方数(式)的取值为非负数，若涉及实际问题，则须使实际问题有意义.

函数一般记作 $f(x)$，其中 f 代表对应法则. $f(a)$ 表示自变量取 a 时的函数值.

3. 形如 $y=kx+b$（k,b 为常数）的函数，若 $k=0$，$y=b$ 是常量函数，图象是过点 $(0,b)$ 的水平直线，若 $k\neq0$，$y=kx+b$ 是一次函数，又若 $b=0$，$y=kx$ 是正比例函数. 一次函数的图象是经过 $(0,b)$ 的一条直线，且

(i) 当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大；

(ii) 当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小.

4. $y=\dfrac{k}{x}$（$k\neq0$）是反比例函数，图象是双曲线.

(i)当 $k>0$ 时,图象的两个分支分别在第一、三象限内,在每个象限内,y 随 x 的增大而减小;

(ii)当 $k<0$ 时,图象的两个分支分别在第二、四象限内,在每个象限内,y 随 x 的增大而增大.

5. 以 x 轴为对称轴,把一次函数 $y=kx+b$ 位于下半平面的部分翻折到上半平面,即得 $y=|kx+b|$ 的图象.

例 题 精 讲

例 1 在直角坐标系中,恰有 $m(>0)$ 个不同的整点(纵、横坐标都是整数的点)到原点 O 的距离都等于定长 d,试求 m 的最小值.

解 设 m 个整点中的一个为 $A(x,y)$(x,y 不同时为 0),则另外三个整点 $(-x,-y)$,$(-x,y)$,$(x,-y)$ 到原点的距离也都是 d,故 $m\geqslant 4$.

$m=4$ 可取到. 如四个整点 $(1,0)$,$(0,1)$,$(-1,0)$,$(0,-1)$ 它们到原点距离都是 1.

综上所述,m 的最小值为 4.

例 2 对任意的实数 x,函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(x-1)=x^2$. 如果 $f(19)=97$,那么 $f(97)$ 除以 1000 的余数是多少?

解 依题设,有

$$\begin{aligned}
f(97)&=97^2-f(96)\\
&=97^2-[96^2-f(95)]\\
&=97^2-96^2+f(95)\\
&=97^2-96^2+95^2-f(94)\\
&=\cdots\qquad\cdots\\
&=97^2-96^2+95^2-94^2+\cdots+21^2-20^2+f(19)\\
&=(97-96)(97+96)+(95-94)(95+94)+\cdots+(21\\
&\quad+20)(21-20)+97
\end{aligned}$$

$$=(97+96+95+\cdots+21+20)+97$$
$$=\frac{(97+20)\times 78}{2}+97$$
$$=4660.$$

因此，$f(97)$除以1000的余数是660.

例3 求下列函数自变量的取值范围.

(1) $y=\dfrac{(2x-1)^0}{\sqrt{x+|x|}}$；

(2) $y=\dfrac{\sqrt{1-|x+4|}}{\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2}$.

解 (1)
$$\begin{cases} 2x-1\neq 0, & ① \\ x+|x|>0. & ② \end{cases}$$

由①得 $x\neq\frac{1}{2}$，由②得 $x>0$，故 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>\frac{1}{2}$.

(2)
$$\begin{cases} 1-|x+4|\geqslant 0, & ③ \\ \sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2\neq 0. & ④ \end{cases}$$

由③得 $-1\leqslant x+4\leqslant 1$，即 $-5\leqslant x\leqslant -3$；

由④得 $x+8\geqslant 0, 5x+20\geqslant 0$，即得 $x\geqslant -4$，

及
$$\sqrt{5x+20}\neq\sqrt{x+8}+2,$$
有
$$5x+20\neq x+8+4+4\sqrt{x+8}$$
化简得
$$\sqrt{x+8}\neq x+2.$$
可变为 $x^2+3x-4\neq 0$，解得 $x\neq 1, -4$. 于是 $x>-4, x\neq 1$.

综上所述，可知 $-4\leqslant x\leqslant -3$.

例4 已知函数
$$y=(2m^2-7m-9)x^{m^2-9m+19},$$
当 m 何值时，

(1) y 是 x 的正比例函数，图象在第二、四象限；

(2) y 是 x 的反比例函数，图象在第一、三象限.

解 (1)依题设，有
$$m^2-19m+19=1, \qquad ①$$

及
$$2m^2-7m-9<0. \qquad ②$$
由①可得 $m=3$ 或 6. $m=6$ 时②式不成立，故 $m=3$.

(2)
$$\begin{cases} m^2-19m+19=-1, & ③ \\ 2m^2-7m-9>0. & ④ \end{cases}$$
由③得 $m=4$ 或 5. 当 $m=4$ 时④式不成立. 故 $m=5$.

例 5 已知反比例函数 $y=(a-3)x^{a^2-5a+5}$ 和一次函数 $y=x+a+1$ 的图象交于 A、B 两点，求线段 AB 的长度.

解 由 $a-3\neq 0$, $a^2-5a+5=-1$ 可得 $a=2$. 于是题设中的反比例函数为 $y=-\frac{1}{x}$，一次函数为 $y=x+3$. 由 $-\frac{1}{x}=x+3$ 得 $x^2+3x+1=0$. 根据韦达定理，有 $x_1+x_2=-3$, $x_1x_2=1$.

设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则
$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=3^2-4\times 1=5,$$
$$(y_1-y_2)^2=[(x_1+3)-(x_2+3)]^2=(x_1-x_2)^2=5.$$
所以 $|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{10}$.

例 6 设直线 $y=x-4$ 与 y 轴交于点 M，直线 $y=-3x+6$ 与 y 轴交于点 N，直线 $y=x-4$ 与 $y=-3x+6$ 的交点为 P，求图象过线段 MN 的中点 Q 与 P 的一次函数的解析式.

解 令 $x=0$，则直线 $y=x-4$ 与 y 轴交点为 $M(0,-4)$. 同样可得 $N(0,6)$，故 MN 的中点为 $Q(0,1)$. 由
$$\begin{cases} y=x-4, \\ y=-3x+6, \end{cases}$$
得 P 点坐标为 $(\frac{5}{2},-\frac{3}{2})$.

设所求一次函数为 $y=kx+b(k\neq 0)$，则
$$\begin{cases} b=1, \\ \frac{5}{2}k+b=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$
解得 $k=-1$, $b=1$. 故所求一次函数为 $y=-x+1$.

例 7　有一个附有进、出水管的容器，每单位时间内进、出的水量都是一定的. 设从某时刻开始的 4 分钟内只进水不出水，在随后的 8 分钟内既进水又出水，得到时间 x(分)与水量 y(升)之间的关系图.

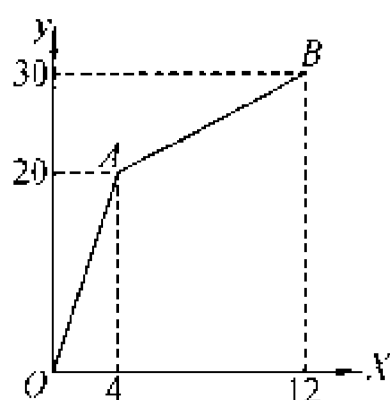


图 7－1

(1)$0\leqslant x\leqslant 12$ 时，x 与 y 有何关系?

(2)若 12 分钟后只放水不进水，求 y 的解析式.

解　(1)依题设，有 $A(4,20)$，直线 OA 为 $y=5x$. 又 $B(12,30)$，设直线 AB 为 $y=kx+b$，有

$$\begin{cases}4k+b=20,\\12k+b=30.\end{cases}$$

解得 $k=\frac{5}{4}$，$b=15$，直线 AB 为 $y=\frac{5}{4}x+15$. 故 $y=\begin{cases}5x\ , & 0\leqslant x\leqslant 4,\\ \frac{5}{4}x+15\ , & 4<x\leqslant 12.\end{cases}$

(2)由图知 4 分钟进水 20 升，故每分钟进水 5 升. 取 $x=5$，可得 $y=\frac{5}{4}\times 5+15=21\frac{1}{4}$. 从 $x=4$ 到 $x=5$，y 增加$\frac{5}{4}$，这表明每分钟出水$\frac{15}{4}$(升). 因此 $x\geqslant 12$ 时，$y=-\frac{15}{4}x+b$. 将$\begin{cases}x=12\\y=30\end{cases}$代入得 $b=75$. 故 $y=-\frac{15}{4}x+75$. 注意到 $y\geqslant 0$，故 $12\leqslant x\leqslant 20$. 所求解析式为 $y=-\frac{15}{4}x+75(12\leqslant x\leqslant 20)$.

例 8　设梯形 $ABCD$ 中，$AB=CD=5$，$AD=8$，$BC=14$，E 为 AD 上的定点，$AE=4$. 动点 P 从 D 出发，沿着梯形的周界依次经过 C、B，最后到达 A，设点 P 走过的距离为 x，$\triangle APE$ 的面积为 y，把 y 表示成 x 的函数，并画出图象.

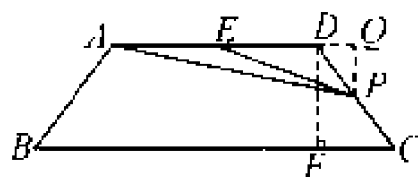


图 7－2

解 如图 7－2，过 D 作 $DF\perp BC$ 于 F，则 $CF=3$，$DF=4$．过 P 作 $PQ\perp AD$，交 AD 延长线于 Q，则 $\mathrm{Rt}\triangle PQD\backsim\mathrm{Rt}\triangle CDF$，有 $PQ=\frac{4}{5}PD$．

(i) 当 P 在 DC 上移动，即 $0\leqslant x\leqslant 5$ 时，

$$y=\frac{1}{2}\cdot 4\times\frac{4}{5}x=\frac{8}{5}x;$$

(ii) 当 P 在 CB 上移动，即 $5\leqslant x\leqslant 19$ 时，

$$y=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8;$$

(iii) 当 P 在 AB 上移动，即 $19\leqslant x\leqslant 24$ 时，类似(i)，有

图 7－3

$$y=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{4}{5}(24-x)=\frac{8}{5}(24-x).$$

故所求函数为

$$y=\begin{cases}\frac{8}{5}x & (0\leqslant x\leqslant 5);\\ 8 & (5<x<19);\\ \frac{8}{5}(24-) & (19\leqslant x\leqslant 24).\end{cases}$$

其图象如图 7－3 所示，为一段折线．

例 9 已知函数 y_1，y_2 的图象如图 7－4 所示，求作 $y=|y_1-y_2|$ 的图象．

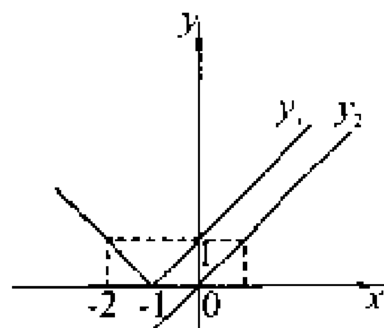


图 7－4

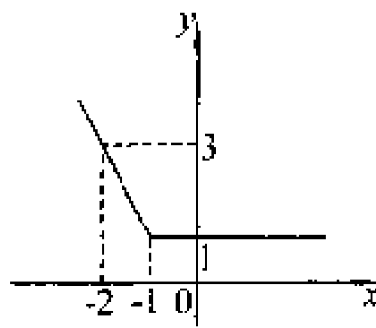


图 7－5

解　y_2 的图象通过点(0,0),(1,1),因此,$y_2=x$. y_1 的图象是 $y=|x|$的图象向左平移 1 个单位得到,因此,$y=|x+1|$. 因为 $y_1>y_2$,故

$$y=y_1-y_2=|x+1|-x=\begin{cases}1-2x & x<-1;\\ 1 & x\geqslant -1.\end{cases}$$

其图象如图 7-5 所示.

练　习　七

一、选择题

1. 设有两点 $A(2,3)$,$B(4,2)$,O 是原点,则 ΔAOB 的面积是　　(　　).

(A)4　　(B)6　　(C)$\frac{15}{4}$　　(D)5

2. 四边形 $ABCD$ 的顶点坐标依次是(2,4),(-1,2),(-2,-2),(3,-2),为使直线 $y=ax$ 与边 AD、BC 都相交,a 的取值范围是　　(　　).

(A) $-2\leqslant a\leqslant 2$　　(B) $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 2$

(C) $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 1$　　(D) $-2\leqslant a\leqslant 1$

3. 已知点 $A(2,-\frac{1}{2})$在直线 $y=kx+\frac{1}{2}$上,则该直线上与点(1,1),(5,3)等距离的点是　　(　　).

(A)(-2,5)　　(B)(5,-2)　　(C)(2,5)　　(D)(5,2)

4. 已知方程$|x|=ax+1$ 有一个负根且没有正根,那么 a 的取值范围是　　(　　).

(A)$a>-1$　　(B)$a=1$　　(C)$a\geqslant 1$　　(D)非上述答案

5. 若关于 x 的方程$||x-2|-1|=a$ 有三个实数根,则 a 的值是　　(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

二、填空题

6. 已知 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{x^2+1}$，则 $f(x)$ 的解析式是______.

7. 已知四条直线 $y=mx-3$，$y=-1$，$y=3$ 和 $x=1$ 所围成的四边形 $ABCD$ 面积是 12，则 $m=$______.

8. 已知函数 $f(x)=x^7-ax^5+bx^3-cx+8$，其中 a,b,c 都是常数，且 $f(19)=95$，则 $f(-19)=$______.

9. 设 $f(x)=ax+a+1$，当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 的值有正有负，则 a 的取值范围是______.

三、解答题

10. 设 $a>0$，$a\neq 1$ 且为常数，求函数

$$y=ax+\frac{1}{a}(1-x)\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$$

的最大值与最小值.

11. 在 $y=(n^2-1)x^{n^2+n-1}$ 中，当常数 n 为何值时，

(1) y 是 x 的正比例函数；

(2) y 是 x 的反比例函数.

12. y 是 x^2 的正比例函数，z 是 x^2 的反比例函数，且 $x=2$ 时，$y+z=340$；$x=1$ 时，$z-y=1275$. 问 x 为何值时，$y=z$，并求以 y 为自变量的函数 z 的解析式.

13. 已知 x,y,z 是非负实数，且满足条件：$x+y+z=30$，$3x+y-z=50$. 求 $u=5x+4y+2z$ 的最大值和最小值.

第八讲　二次函数的图象和性质

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 二次函数的主要表示形式：

(i) $y=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$. $a>0$ 时，开口向上；$a<0$ 时，开口向下；对称轴是直线 $x=k$；顶点坐标是 (h,k).

当 $a>0$ 时，在 $x=h$ 处，函数 y 取最小值 k；

当 $a<0$ 时，在 $x=h$ 处，函数 y 取最大值 k.

(ii) $y=a(x-x_1)(x-x_2)$. 这里 x_1,x_2 是抛物线与 x 轴两个交点的横坐标.

(iii) $y=ax^2+bx+c$. 这是一般的表示形式. 对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$. a 的符号决定开口方向，c 决定抛物线与 y 轴交点.

2. 确定一个二次函数需要三个独立的条件.

例 题 精 讲

例 1　已知二次函数的图象过 $(1,0)$，$(-2,0)$，$(2,3)$ 三点，求二次函数的解析式.

分析　题设中，抛物线与 x 轴的交点为 $(1,0)$，$(-2,0)$，故可设二次函数的解析式为

$$y=a(x-1)(x+2).$$

又点 $(2,3)$ 在抛物线上，可得

$$3=a(2-1)(2+2),$$

解得 $a=\dfrac{3}{4}$. 所以函数解析式为 $y=\dfrac{3}{4}(x-1)(x+2)$，即 $y=\dfrac{3}{4}x^2+$

$\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$.

例 2 当 $x=\frac{1}{2}$时，二次函数 $y=f(x)$的最大值为 25，函数图象与 x 轴相交于两点，这两点横坐标的平方和等于 13，求 $f(x)$的解析式.

解 依题意，可设二次函数解析式为 $y=a(x-\frac{1}{2})^2+25$，即 $y=ax^2-ax+\frac{a}{4}+25$.

设抛物线与 x 轴的交点的横坐标为 x_1,x_2，则

$$\begin{cases}x_1+x_2=1,\\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{4}+\frac{25}{a}.\end{cases}$$

于是

$$x_1^2+x^2x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=1^2-2\cdot(\frac{1}{4}+\frac{25}{a})=13,$$

解得 $a=-4$.

所求二次函数的解析式为 $y=-4(x-\frac{1}{2})^2+25$，即 $y=-4x^2+4x+24$.

例 3 已知二次函数 $y=2x^2-4mx+m^2$ 的图象与 x 轴有两个交点，交点为 A、B，顶点为 C. 若 ΔABC 的面积为 $4\sqrt{2}$，试确定 m 的值.

分析 如图 8－1，$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y_c|$. 这里 y_c 是点 C 的纵坐标.

设 A、B 两点的横坐标为 x_1,x_2，则

$$|AB|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}|m|,$$

$$|y_c|=\left|\frac{(-4m)^2-4\times 2m^2}{2\times 2}\right|=m^2.$$

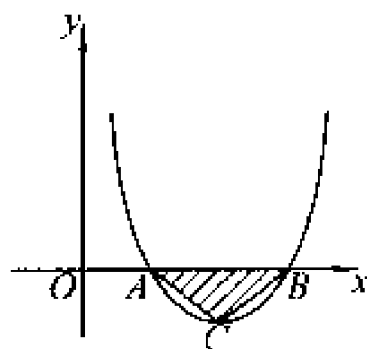


图 8－1

于是 $$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}|m|\cdot m^2=4\sqrt{2},$$
所以 $|m|=2$，即 $m=\pm 2$.

例 4 (1)对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，若 $f(\alpha)=f(\beta)$ ($\alpha\neq\beta$)，试证明 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 是这个二次函数图象的对称轴.

(2)设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x-2)=f(-x-2)$，且图象与 y 轴交于点(0,1)，在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$，求 $f(x)$ 的表达式.

分析 (1)因 $f(\alpha)=f(\beta)$，故
$$a\alpha^2+b\alpha+c=a\beta^2+b\beta+c,$$
即 $$(\alpha-\beta)(a\alpha+a\beta+b)=0.$$
因 $\alpha\neq\beta$，故 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，可知 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 是这个二次函数图象的对称轴.

(2)因 $f(x-2)=f(-x-2)$，由(1)知 $x=-2$ 是二次函数 $f(x)$ 的图象的对称轴. 设
$$f(x)=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+4a+b$$
与 x 轴两交点坐标分别是 x_1,x_2，于是 $x_1+x_2=-4$，$x_1x_2=4+\frac{b}{a}$，有
$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(-4)^2-4(4+\frac{b}{a})}=2\sqrt{-\frac{b}{a}}=2\sqrt{2}.$$
可得 $b=-2a$. 又抛物线过点(0,1)，可知 $4a+b=1$，所以 $a=\frac{1}{2}$，$b=-1$，所求二次函数为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

例 5 抛物线 $y=ax^2$ 与由直线 $x=1$，$x=2$，$y=1$，$y=2$ 围成的图形的边界线或内部有公共点时，a 在什么范围内变动？

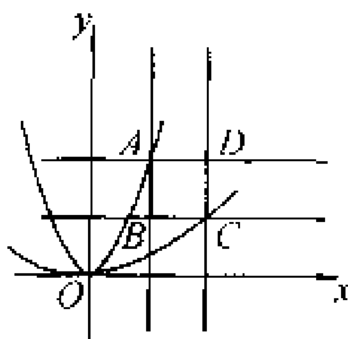


图 8－2

分析 如图 8－2，欲使抛物线 $y=ax^2$ 与由四直线 $x=1$，$x=2$，$y=1$，$y=2$ 围成的正方形 $ABCD$ 有公共点，当且仅当抛物线与对角线 AC

有公共点.

通过点 $A(1,2)$的抛物线是 $y=2x^2$;通过点 $C(2,1)$的抛物线是 $y=\frac{1}{4}x^2$.因此$\frac{1}{4}\leqslant a\leqslant 2$.

例 6 如图 8－3,长为 2 的线段 PQ 在 x 轴的正半轴上.从 P、Q 分别作 x 轴的垂线,与抛物线 $y=x^2$ 交于 P'、Q'.若点 P 坐标为$(k,0)$,当 k 为何值时,直线 OP' 把梯形 $P'PQQ'$ 的面积二等分.

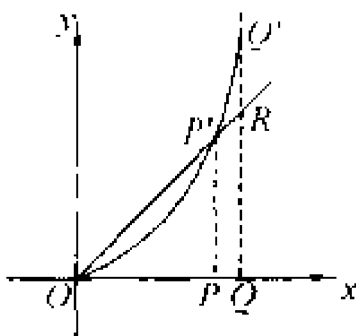


图 8－3

解 因 P 坐标为$(k,0)$,故 $Q(k+2,0)$,$P'(k,k^2)$,$Q'(k+2,(k+2)^2)$,且直线 OP' 与 QQ' 的交点 R 的纵坐标为$k(k+2)$.于是

$$S_{P'QQ'}=\frac{1}{2}(PP'+QQ')\cdot PQ=k^2+(k+2)^2,$$

$$S_{P'PQR}=\frac{1}{2}(PP'+QR)\cdot PQ=k^2+k(k+2).$$

依题设,有

$$k^2+(k+2)^2=2[k^2+k(k+2)],$$

解得 $k=\pm\sqrt{2}$("－"不合题意,舍去).$k=\sqrt{2}$为所求.

例 7 若对二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$,存在数 p,使 $af(p)<0$.证明:方程 $f(x)=0$ 有两个不同的实根,一个比 p 大,另一个比 p 小.

证明
$$af(p)=a(ap^2+bp+c)$$
$$=a^2[(p+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}]<0,$$

可得
$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}>(p+\frac{b}{2a})^2>0.$$

因此 $b^2-4ac>0$.方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的实数根,设为 α,β,$\alpha<\beta$,则

$$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

有 $$af(p)=a^2(p-\alpha)(p-\beta)<0,$$
可见 $(p-\alpha)(p-\beta)<0$,所以 $\alpha<p<\beta$.

例 8 (1)证明:若二次函数 $y=ax^2-bx+c$ 的值当 $x_1=0,x_2=1,x_3=2$ 时均为整数,则对任何整数 x,y 的值都是整数;

(2)若对任何整数 x,$y=ax^2+bx+c$ 的值都是整数,a,b,c 是否必为整数?

解 (1)依题设,可知 $c,a-b+c,4a-2b+c$ 都是整数,因此,有

$$a-b=(a-b+c)-c,$$

与
$$4a-2b=(4a-2b+c)-c$$

都是整数.进而可知

$$2a=(4a-2b)-2(a-b),$$

及
$$2b=(4a-2b)-4(a-b)$$

都是整数.

当 x 为偶数时,设 $x=2k$,则

$$y=4ak^2-2bk+c$$

为整数;当 x 为奇数时,设 $x=2k+1$,则

$$y=a(2k+1)^2-b(2k+1)+c=4ak^2+4ak-2bk+(a-b+c)$$

仍为整数.

(2)因 $x=0$ 时,$y=c$,故 c 必为整数,但 a,b 不一定是整数.如函数

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{2}x(x+1)+1.$$

当 x 为整数时,y 必为整数.但这个函数中 x^2,x 的系数并不是整数.

例 9 生产某商品 x 吨需费用 $1000+5x+\frac{1}{10}x^2$ 元,出售该商品 x 吨时的价格是每吨 $a+\frac{x}{b}$ 元,其中 a,b 是常数.如果生产出的商品都能卖掉,并且当产量是 150 吨时利润最大,这时每吨的价格是 40 元,求 a,b 的值.

解　设卖出 x 吨的利润是 y 元.依题设,有

$$y=x(a+\frac{x}{b})-(1000+5x+\frac{1}{10}x^2)$$

$$=(\frac{1}{b}-\frac{1}{10})x^2+(a-5)x-1000.$$

又由题设知,当 $x=150$ 时,y 最大.因此

$$\begin{cases}-\dfrac{a-5}{2(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{10})}=150,\\ a+\dfrac{150}{b}=40,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a+\dfrac{300}{b}=35,\\ a+\dfrac{150}{b}=40.\end{cases}$$

解得 $a=45,b=-30$.当 $b=-30$ 时,$\frac{1}{b}-\frac{1}{10}<0$,故 y 有最大值.因此,$a=45,b=-30$ 为所求.

练　习　八

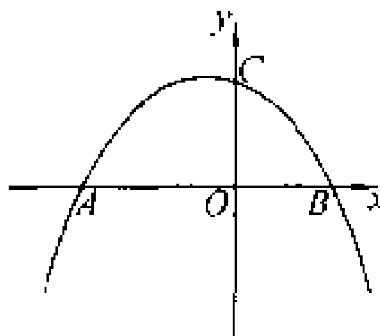
一、选择题

1.如果某个二次函数的图象与已知二次函数 $y=x^2-2x$ 的图象关于 y 轴对称,那么这个二次函数的解析式是　　　(　　).

(A)$y=-x^2+2x$　　(B)$y=x^2+2x$

(C)$y=-x^2-2x$　　(D)$y=\dfrac{1}{x^2-2x}$

2.如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴相交于点 A、B,与 y 轴相交于点 C,如果 $OB=OC=\frac{1}{2}OA$,那么 b 的值为　　　(　　).



(第 2 题)

(A)-2　　(B)-1

(C) $-\frac{1}{2}$　　　　(D) $\frac{1}{2}$

3. 不论 k 取任何实数,抛物线 $y=a(x+k)^2+k(a\neq 0)$ 的顶点都　　(　　).

(A)在直线 $y=x$ 上　　　　(B)在直线 $y=-x$ 上

(C)在 x 轴上　　　　(D)在 y 轴上

4. 若函数 $y=-ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限,则函数 $y=ax^2+bx-\frac{b}{8a}$ 的图象必不经过　　(　　).

(A)第一象限　　　　(B)第二象限

(C)第三象限　　　　(D)第四象限

5. 一学生推铅球,铅球行进的高度 y(m)与水平距离 x(m)间的函数关系为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$,则铅球落地时的水平距离是

(　　).

(A) $\frac{5}{3}$m　　(B)3m　　(C)10m　　(D)12m

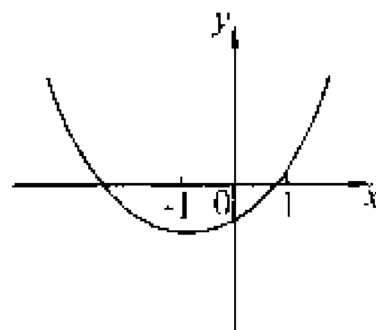
二、填空题

6. 抛物线 $y=\frac{1}{m}x^2+4(\frac{1}{m}-3)x-8$ 与 x 轴有两个交点. 为使这两个交点之间的距离的平方最小,m 的值为______.

7. 若对任何实数 p,抛物线 $y=2x^2-px+4p+1$ 都经过一定点,此定点的坐标是______.

8. 已知抛物线 $y=(x-3k)(x-k-3)$. 为使它在直线 $x=1$ 与 $x=3$ 之间的部分在第四象限内,k 的取值范围是______.

9. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示,则下列四个不等式:



(第 9 题)

①$abc>0$,

②$a+b+c>0$,

③$a+b+c<0$,

④$a-b+c>0$.

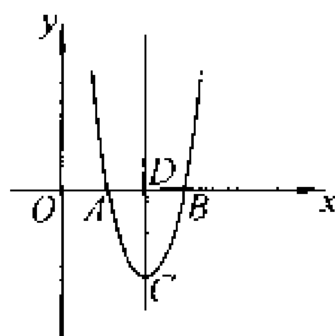
其中成立的是______.

10. 当 m 变化时抛物线 $y=x^2-(m^2+4)x-2m^2-12$ 与 x 轴的两交点间的最小距离是______.

三、解答题

11. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 $Q(0,3)$，与 x 轴交于 A，B，抛物线的顶点 P 在 x 轴上方，且 $S_{\triangle AQB}:S_{\triangle APB}=3:4$，抛物线与 x 轴两交点的横坐标的平方和为 10，求该抛物线.

12. 如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(1,0)$、$B(3,0)$ 两点，且过点 $(-1,16)$，抛物线的顶点是 C 点，对称轴与 x 轴交于 D 点，原点为 O 点. 若 y 轴正半轴上有一动点 N，使以 A、O、N 三点为顶点的三角形与以 C、A、D 三点为顶点的三角形相似.



(第 12 题)

(1)求这条抛物线的解析式；

(2)求 N 点的坐标.

13. 已知 $a>b>c$，且 $a+b+c=0$. 设抛物线 $y=ax^2+2bx+c$ 被 x 轴截得的线段的长为 l，试求 l 的取值范围.

14. (1)作出下述函数的图象：

$f(x)=|(x-2)(x-4)|+|(x-4)(x-6)|+2|(x-2)(x-6)|$.

(2)设 k 是实数，方程 $f(x)=k$ 的实根 x 的个数与 k 有什么关系？

第九讲　解直角三角形

知识点和方法述要

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，则

(1) $\sin A=\dfrac{a}{c}$，$\cos A=\dfrac{b}{c}$，$\tan A=\dfrac{a}{b}$，$\cot A=\dfrac{b}{a}$；

(2) $\sin A=\cos B$，$\cos A=\sin B$，$\tan A=\cot B$，$\cot A=\tan B$.

(3) $\sin^2A+\cos^2A=1$，$\tan A\cdot\cot A=1$，$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$，$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$.

2. 一些特殊角的三角比值：

三角比值 \ 三角比 \ 角度 α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3. 在直角三角形(除直角外)的五个元素中，只要知道其中两个(至少有一条边)，用边、角关系可以求出另外 3 个元素.

不少较复杂的问题，可通过辅助线构造直角三角形再利用锐角三角形使问题得以解决　如作等腰三角形底边上的高，梯形的高等.

例题精讲

例 1　已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$a+b=2$，$\angle A=30°$. 求 a，b，

c 的值.

解 因 $\sin A=\dfrac{a}{c}$, $\cos A=\dfrac{b}{c}$, $\angle A=30^\circ$, 故

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}=\sin30^\circ+\cos30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又 $a+b=2$, 所以

$$c=\frac{2(a+b)}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\cdot2(\sqrt{3}-1)}{3-1}=2(\sqrt{3}-1).$$

则
$$a=c\sin A=2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}-1.$$

$$b=c\cos A=2(\sqrt{3}-1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3-\sqrt{3}.$$

例 2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 D 为 AB 中点, $\angle ACB=135^\circ$, $AC\perp CD$, 求 $\sin A$ 的值.

解一 如图 9－1, 过 D 作 $DE/\!/BC$ 交 AC 于 E. 因 $AD=DB$, 故 $AE=CE$. 因 $\angle ACB=135^\circ$, $\angle ACD=90^\circ$, 故 $\angle1=45^\circ$, $\angle1=\angle2=45^\circ$, 可知 $CD=CE$.



图 9－1

设 $CD=a$, 则 $AC=2a$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中,

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=\sqrt{5}a,$$

所以
$$\sin A=\frac{CD}{AD}=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

解二 如图 9－2, 过 B 作 $BE/\!/DC$, 交 AC 的延长线于 E, 因 $AD=DB$, 故 $AC=CE$, $\angle2=\angle3=45^\circ$, 可得 $CE=BE$.

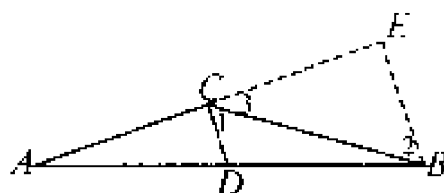


图 9－2

设 $AC=a$, 则 $AE=2a$, $BE=a$, 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中,

$$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=\sqrt{5}a.$$

所以
$$\sin A=\frac{BE}{AB}=\frac{a}{\sqrt{5}a}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

例 3 已知

$$17\cos A + 13\cos B = 17,$$
$$17\sin A = 13\sin B,$$

且 A, B 都是锐角,求 $\frac{A}{2} + B$ 的值.

分析 难以直接利用条件等式,联想到 $17\sin A$ 可看作斜边为 17 的直角三角形中锐角 A 所对的直角边长,$13\sin B$ 可看作斜边为 13 的直角三角形中锐角 B 所对的直角边长,二者相等,表明两直角三角形有一直角边可公共.而相应的 $17\cos A$ 与 $13\cos B$ 是这两个直角三角形的另一直角边长,因其和为 17,故 A、B 应位于公共边的两侧.如图 9-3,作 ΔABC,使 $AB = AC = 17$, $BC = 13$.过 C 作 $CD \perp AB$ 于 D,则

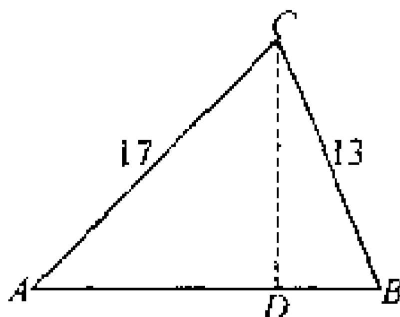


图 9-3

$$CD = 17\sin A = 13\sin B,$$
$$AB = AD + DB = 17\cos A + 13\cos B = 17.$$

于是,有 $\angle A + 2\angle B = 180°$,即 $\frac{A}{2} + B = 90°$.

例 4 如图 9-4,直线 m 和塔底 E 在同一水平面上,在 m 上的三点 A、B、C 处分别测得塔顶 D 的仰角为 30°,45°,60°,量得 $AB = BC = 600$ 米,求塔高 DE.

解 设塔高为 h 米,在 RtΔADE、RtΔBDE、RtΔCDE 中,有

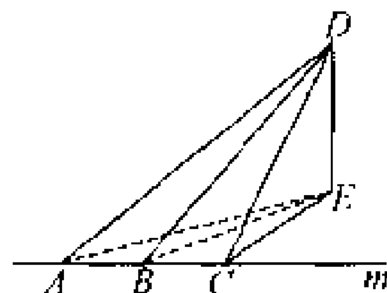


图 9-4

$$AE = h \cdot \cot 30° = \sqrt{3}h,$$
$$BE = h \cdot \cot 45° = h,$$
$$CE = h \cdot \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}h,$$

在 ΔACE 中,BE 是 AC 边上的中线,由中线长公式,得

$$BE = \sqrt{\frac{1}{2}(AE^2 + EC^2) - \frac{1}{4}AC^2}.$$

将 $AE=\sqrt{3}h$，$BE=h$，$CE=\frac{\sqrt{3}}{3}h$，$AC=2\times600=1200$，代入上式，解得 $h=300\sqrt{6}$(米)．

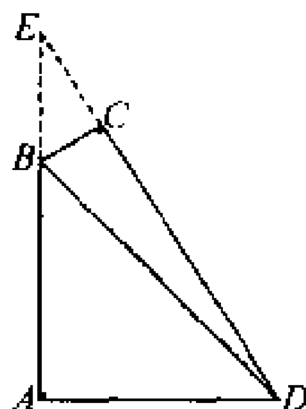


图 9－5

例 5 四边形 $ABCD$ 中，$\angle D=60^\circ$，$\angle A=\angle C=90^\circ$，$AB=11$，$BC=2$，求 BD 的长．

解 如图 9－5，设 AB 与 DC 的延长线交于 E．

在 Rt$\triangle EAD$ 中，因 $\angle D=60^\circ$，故 $\angle E=30^\circ$，有 $BE=2BC=4$．进而得

$$AE=AB+BE=11+4=15.$$

又 $\frac{AD}{AE}=\tan30^\circ$，所以

$$AD=AE\cdot\tan30^\circ=15\times\frac{\sqrt{3}}{3}=5\sqrt{3}.$$

在 Rt$\triangle BAD$ 中，有

$$BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2+11^2}=14.$$

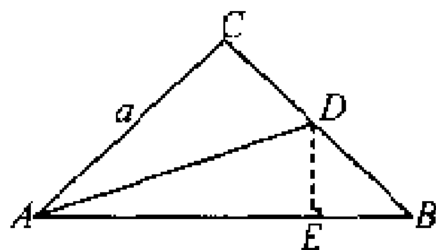


图 9－6

例 6 已知 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，AD 是 BC 上的中线，求 $\cos\angle BAD$ 与 $\sin\angle BAD$ 的值．

解 设 $AC=BC=a$，则 $BD=DC=\frac{a}{2}$，$\angle CAB=\angle CBA=45^\circ$．作 $DE\perp AB$ 于 E（如图 9－6），则

$$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

及 $AB=\sqrt{2}a$，$DE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，且 $\sin\angle BAD=\frac{DE}{AD}$，$\cos\angle BAD=\frac{AE}{AD}$，于是

$$\sin\angle BAD+\cos\angle BAD=\frac{DE+AE}{AD}=\frac{\sqrt{2}a}{\frac{\sqrt{5}a}{2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5},$$

$$\sin\angle BAD\cdot\cos\angle BAD=\frac{DE\cdot AE}{AD^2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}a}{(\frac{\sqrt{5}}{2}a)^2}=\frac{3}{10}.$$

故 $\sin\angle BAD$，$\cos\angle BAD$ 是方程 $x^2-\frac{2\sqrt{10}}{5}x+\frac{3}{10}=0$ 的两个根，解此方程可得 $x_1=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$x_2=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 因 $\angle BAD<45°$，所以 $\cos\angle BAD>\sin\angle BAD$，可知 $\sin\angle BAD=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos\angle BAD=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

例 7　四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=135°$，$\angle BCD=120°$，$AB=\sqrt{6}$，$BC=5-\sqrt{3}$，$CD=6$，求 AD.

解　过 A 作 $AE/\!/BC$ 交 CD 于 E，作 $BM\perp AE$ 于 M，$CN\perp AE$ 于 N(如图 9－7)，则 $\angle BAE=45°$. 在 $Rt\triangle BAM$ 中，$AM=BM=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{3}$，四边形 $BMNC$ 为矩形，$CN=BM=\sqrt{3}$，$MN=BC=5-\sqrt{3}$；

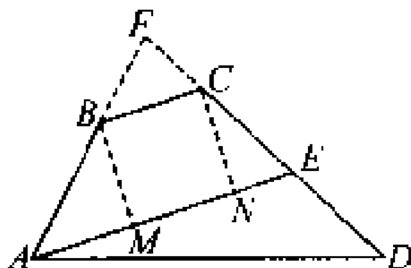


图 9－7

在 $Rt\triangle CNE$ 中，$\angle CEN=60°$，$NE=CN\cot 60°=1$，$CE=2$. 所以 $AE=AM+MN+NE=6$，$DE=CD-CE=4$.

过 A 作 $AF\perp DC$ 交 DC 延长线于 F. 则 $EF=\frac{1}{2}AE=3$，$AF=AE\cdot\sin 60°=3\sqrt{3}$，$DF=DE+EF=7$.

在 $Rt\triangle ADF$ 中，$AD^2=AF^2+DF^2=(3\sqrt{3})^2+7^2=76$. 故 $AD=2\sqrt{19}$.

例 8　已知菱形 $ABCD$ 的边长为 a，$\angle DAB=60°$，E 为 AD 上一动点，F 在 CD 上，满足条件 $AE+CF=a$，判断 $\triangle BEF$ 的形状，并求 $\triangle BEF$ 的面积的最小值.

解　设 $AE=x$，则 $CF=a-x$. 过 E 作 $EG\perp AB$ 于 G(如图 9－8).

在 RtΔAEG 中，$AG = AE\cos60° = \frac{1}{2}x$，

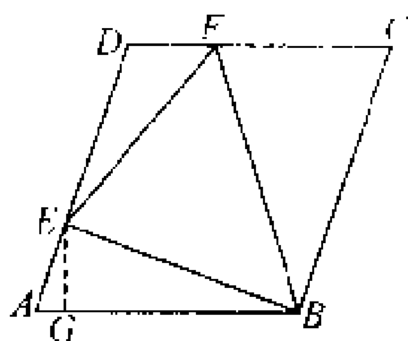


图 9－8

$EG = AE\sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$，故

$$BG = AB - AG = a - \frac{1}{2}x.$$

在 RtΔBEG 中，

$$BE^2 = EG^2 + BG^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + (a - \frac{1}{2}x)^2 = x^2 - ax + a^2.$$

分别过 B、E 作 CD 的垂线，同样可得 $BF^2 = x^2 - ax + a^2$，$EF^2 = x^2 - ax + a^2$. 故 $BE^2 = BF^2 = EF^2$，即 $BE = BF = EF$，ΔBEF 为等边三角形. 又

$$S_{\Delta BEF} = \frac{\sqrt{3}}{4}BE^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - ax + a^2) = \frac{\sqrt{3}}{4}[(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{3}{4}a^2].$$

当 $x = \frac{a}{2}$，即 E 为 AD 的中点时，$S_{\Delta BEF}$ 取最小值，其最小值为

$$S_{\Delta BEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2.$$

例 9 （1）求 tan15°的值；

（2）如图 9－9，E 为正方形 $ABCD$ 中一点，$\angle EAB = \angle EBA = 15°$，连 DE、CE，求证：ΔDCE 为正三角形.

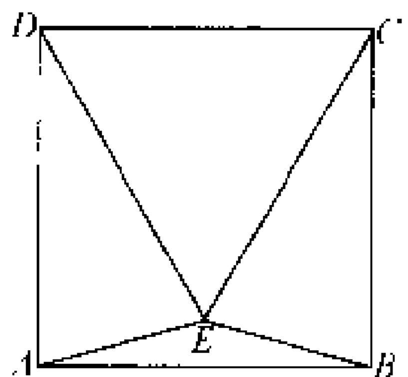


图 9－9

解 （1）如图 9－10，作一 RtΔABC，使 $\angle BCA = 90°$，$\angle BAC = 30°$. 设 $BC = 1$，则 $AC = \sqrt{3}$，$AB = 2$. 延长 CA 至 D，使 $AD = AB = 2$，则 $DC = 2 + \sqrt{3}$，且 $\angle BDC = 15°$.

在 RtΔDBC 中，依正切定义，可知

$$\tan 15° = \tan\angle D = \frac{BC}{DC} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}.$$

(2)在图 9－9 中，作 $EH \perp CD$，交 CD 于 H，交 AB 于 F，易知 F、H 分别为 AB、CD 中点，由(1)知

$$\frac{EF}{AF} = \tan 15° = 2-\sqrt{3}.$$

不妨设正方形边长为 1，则 $AF = FB = DH = CF = \frac{1}{2}$，

$$EF = AF \cdot \tan 15° = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$EH = FH - EF = 1 - (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以，$DE = \sqrt{DH^2 + EH^2} = \sqrt{AF^2 + EH^2}$

$$= \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1.$$

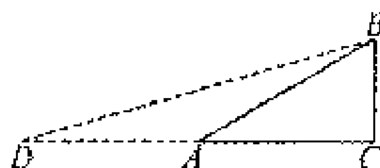


图 9－10

同理可得 $CE = 1$，于是 $DE = CE = DC = 1$，即 $\triangle CDE$ 为等边三角形.

练　习　九

一、选择题

1. 下面四个数中最大的是　　　　(　　)

(A) $\tan 48° + \cot 48°$　　(B) $\sin 48° + \cos 48°$

(C) $\tan 48° + \cos 48°$　　(D) $\cot 48° + \sin 48°$

2. 设 $\cos\theta + \cos^2\theta = 1$，$\theta$ 为锐角，下面的结论正确的是　　　　(　　)

(A) $\sin\theta + \sin^2\theta > 1$

(B) $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$

(C) $\sin\theta + \sin^2\theta < 1$

(D) $\sin\theta + \sin^2\theta$ 与 1 的大小关系不能确定.

3. 锐角 $\triangle ABC$ 中，$AC = 1$，$AB = c$，$\angle A = 60°$，则　　　　(　　)

(A) $\frac{1}{2} < C < 2$　　(B) $0 < C \leqslant \frac{1}{2}$

(C) $C>2$ (D) $C=2$

4. 在 ΔABC 中，$\angle A=30°$，$\angle C-\angle B=60°$，若 $BC=a$，则 AB 的长为 ( )

(A) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}a$ (B) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}a$

(C) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}a$ (D) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{2}a$

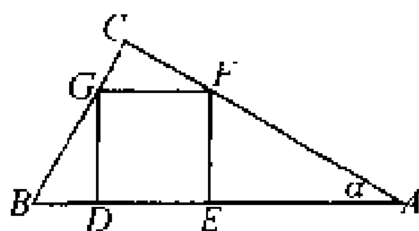
5. $\cot 67°30'$ 的值是 ( )

(A) $\sqrt{2}-1$ (B) $2-\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ (D) $\frac{1}{2}$

二、填空题

6. 已知 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根(p,q 是给定实数)，若 $\cot\alpha$ 和 $\cot\beta$ 是方程 $x^2-rx+s=0$ 的两根，则 $rs=$________.

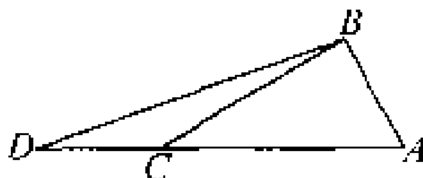
7. ΔABC 中，$\angle A=135°$，$\angle B=15°$，则 $a:b:c=$________.



(第 8 题)

8. RtΔABC 中，斜边 $AB=c$，$\angle A=\alpha$，则图中的 ΔABC 的内接正方形的边长是________.

9. 如图，$AB=CD=1$，$\angle ABC=90°$，$\angle CBD=30°$，则 $AC=$________.



(第 9 题)

三、解答题

10. 外国船只，除特许者外，不得进入离我海岸 D 海里以内的区域。设 A 及 B 是我们的观察站，A 及 B 间的距离为 S 海里，海岸线是过 A、B 的直线，一外国船在 P 点。在 A 站测得 $\angle BAP=\alpha$，同时在 B 站测得 $\angle ABP=\beta$. 问 α 及 β 满足什么简单的三角函数不等式，就应当向此未经特许的外国船只发出警告，命令其退出我海域?

11. 已知 RtΔABC 中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，AD 是 BC 上的中线，求证：$\cos\angle BAD$ 和 $\sin\angle BAD$ 是方程 $10x^2-4\sqrt{10}x+3=0$ 的两个根.

12. 已知直线 l 上依次有四点 A、B、C、D，l 外有一点 P，且 $AB=$

$a, BC=b, CD=c, \angle APB=\alpha, \angle BPC=\beta, \angle CPD=r$.求证：

$$\frac{ac}{(a+b)(b+c)}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)}.$$

13. RtΔABC 的斜边为 AB，C 与 AB 边上的三等分点的连线分别长 $\sin\alpha$ 与 $\cos\alpha$ $(0^\circ<\alpha<90^\circ)$，求 AB 的长.

14. 证明：在任意凸四边形中，一定可以找到三个顶点 A、B、C，使得 $\sin\angle ABC\angle\cos\angle ABC$.

第十讲　$[x]$与$\{x\}$

知识点和方法述要

1.设 x 是实数,不大于 x 的最大整数叫做 x 的整数部分,记作 $[x]$.记 $\{x\}=x-[x]$,称 $\{x\}$ 为 x 的小数部分,如 $[4.5]=4$,$[-3.5]=-4$,$[\sqrt{3}]=1$,$[\pi]=3$,$\{\sqrt{2}\}=\sqrt{2}-1$.

函数 $y=[x]$ 也称作高斯函数,以纪念德国的著名数学家高斯.

2.$[x]$与$\{x\}$有如下基本性质:

(ⅰ)$0\leqslant\{x\}<1$,当且仅当 $\{x\}=0$ 时,x 为整数.

(ⅱ)$[x]\leqslant x<[x]+1$.

(ⅲ)$[x]+[y]\leqslant[x+y]$;当 $x\geqslant0$,$y\geqslant0$ 时,$[x][y]\leqslant[xy]$.

证明　因 $x=[x]+\{x\}$,$y=[y]+\{y\}$,故

$$x+y=[x]+[y]+\{x\}+\{y\},$$

这表明 $[x]+[y]$ 为不超过 $x+y$ 的整数,而 $[x+y]$ 是不超过 $x+y$ 的最大整数,所以

$$[x]+[y]\leqslant[x+y].$$

类似地可证明后两部分.

(ⅳ)当 n 为整数时,$[n+x]=n+[x]$.

证明　因 $x=[x]+\{x\}$,$0\leqslant\{x\}<1$,故

$[n+x]=[n+[x]+\{x\}]=[n+[x]]=n+[x]$.

(ⅴ)$[-x]=\begin{cases}-[x]-1,\text{当 } x \text{ 不是整数},\\ -[x].\text{当 } x \text{ 是整数}.\end{cases}$

证明　因 $x=[x]+\{x\}$,故

$$-x=-[x]-\{x\}.$$

当 x 为整数时,$\{x\}=0$,有

$$[-x]=-x=-[x];$$

当 x 不为整数时,$0<\{x\}<1$,有 $0<1-\{x\}<1$,于是

$$-x=-[x]-1+1-\{x\},$$

$$[-x]=-[x]-1.$$

(vi)若 $x<y$,则$[x]\leqslant[y]$;若$[x]<[y]$,则 $x<y$.

注意由 $x<y$,不能得出$[x]<[y]$;由$[x]\leqslant[y]$不能得出 $x\leqslant y$,特别地,$[x]=[y]$不能确定 x,y 之间大小关系.

(vii)设 p 为一系数,$p^m\leqslant n<p^{m+1}$,则 $n!$ 中含 P 的最高次幂指数为

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right].$$

证明 在 $1,2,\cdots,n$ 中能被 p 整除的有且仅有$\left[\frac{n}{p}\right]$个:$p,2p,3p,\cdots,\left[\frac{n}{p}\right]p$;能被 p^2 整除的有有仅有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个:$p^2,2p^2,\cdots,\left[\frac{n}{p^2}\right]p^2$;…能被 P^k 整除的有且仅有$\left[\frac{n}{p^k}\right]$个:$p^k,2p^k,\cdots,\left[\frac{n}{p^k}\right]p^k$;最后的被 p^m 整除的有且仅有$\left[\frac{n}{p^m}\right]$个,即$\left[\frac{n}{p^m}\right]p^m$ 这一个.

注意到在 $1,2,\cdots,n$ 中有一数 a 含 P 的最高次幂为 p^k,那么 a 同时能被 $p,p^2,\cdots,p^k$ 整除,p^k 在$\left[\frac{n}{p}\right],\left[\frac{n}{p^2}\right],\cdots,\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right]$及$\left[\frac{n}{p^k}\right]$中各计算过一次,所以,$n!$ 中含 P 的最高次幂指数应为

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p^m}\right].$$

(viii)实数 x 可以表示成$[x]$与$\{x\}$的和,前者是整数,后者满足:$0\leqslant\{x\}<1$.在有关问题解决中,常利用它们之间的关系,根据问题的需要相互转化,结合$[x]$的性质及不等式夹逼等手段.

例 题 精 讲

例 1 解方程:$x^2-3[x]+2=0$.

解 设$[x]=n$,则

$$x^2+2=3n. \quad ①$$

可见 $n>0$. 因 $n\leqslant x<n+1$, 故

$$n^2+2\leqslant x^2+2<(n+1)^2+2. \quad ②$$

由①,②得

$$n^2+2\leqslant 3n<(n+1)^2+2.$$

解得 $n=1,2$. 故 $x=1,2$.

例 2 解方程：$2[x]=x+2\{x\}$.

解 原方程可变为

$$2[x]=[x]+\{x\}+2\{x\}.$$

即
$$3\{x\}=[x].$$

因 $0\leqslant\{x\}<1$, 故 $0\leqslant[x]<3$, 于是 $[x]$ 只可能为 0,1,2, 且 $x=[x]+\{x\}=\frac{4[x]}{3}$. 当 $[x]=0$ 时, $x=0$; 当 $[x]=1$ 时, $x=\frac{4}{3}$; $[x]=2$ 时, $x=\frac{8}{3}$.

例 3 若 $x>0$, 且

$$[x]^2=x(x-[x]), \quad ①$$

求 $x-\frac{1}{x}$.

解 因 $x>0$, 故 $[x]\geqslant 0$, 且 $0\leqslant\{x\}<1$, 由①得

$$[x]^2=([x]+\{x\})\cdot\{x\}<[x]+1,$$

即
$$0\leqslant[x]<\frac{1+\sqrt{5}}{2}<2.$$

即 $[x]=0$ 或 1.

当 $[x]=0$ 时, 由①得 $x^2=0$, $x=0$ 与 $x>0$ 不符.

当 $[x]=1$ 时, 由①得

$$x^2-x=1,$$

即
$$x-\frac{1}{x}=1.$$

例 4 证明：对任意实数 x，有

$$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]. \quad ①$$

证明 注意到 $x=[x]+\{x\}, 0\leqslant\{x\}<1$，有

$$x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}$$
$$2x=2[x]+2\{x\}.$$

可分以下两种情形：

（ⅰ） 当 $0\leqslant\{x\}<\frac{1}{2}$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant\{x\}+\frac{1}{2}<1, 0\leqslant2\{x\}<1$，故

$$[x]+[x+\frac{1}{2}]=2[x]=[2x].$$

（ⅱ） 当 $\frac{1}{2}\leqslant\{x\}<1$ 时，$0\leqslant\{x\}-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}, 0\leqslant2\{x\}-1<1$，

$$x+\frac{1}{2}=[x]+\{x\}+\frac{1}{2}=[x]+1+\{x\}-\frac{1}{2},$$
$$2x=2[x]+2\{x\}=2[x]+1+2\{x\}-1,$$

故 $$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[x]+[x]+1=2[x]+1,$$
$$[2x]=2[x]+1.$$

从而，有 $$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x].$$

例 5 在 1000! 的末尾有多少个 0?

分析 只须考察 1000! 中含 10 的最高次幂指数，因 $10=2\times5$，2 与 5 都是素数，且明显地可以看出 1000! 中含 2 的最高次幂指数高于 5 的最高次幂指数，故 1000! 中含 10 的最高次幂指数即其中含 5 的最高次幂指数，所以

$$[\frac{1000}{5}]+[\frac{1000}{5^2}]+[\frac{1000}{5^3}]+[\frac{1000}{5^4}]$$
$$=200+40+8+1=249,$$

即为 1000! 末尾的 0 的个数.

例 6 计算：

$$\left[\frac{23\times 1}{41}\right]+\left[\frac{23\times 2}{41}\right]+\cdots+\left[\frac{23\times 39}{41}\right]+\left[\frac{23\times 40}{41}\right].$$

分析 因

$$\frac{23\times 1}{41}+\frac{23\times 40}{41}=23,$$

$$\left[\frac{23\times 1}{41}\right]+\left\{\frac{23\times 1}{41}\right\}+\left[\frac{23\times 40}{41}\right]+\left\{\frac{23\times 40}{41}\right\}=23,$$

又 $$0<\left\{\frac{23\times 1}{41}\right\}+\left\{\frac{23\times 40}{41}\right\}<2.$$

且为整数,所以

$$\left\{\frac{23\times 1}{41}\right\}+\left\{\frac{23\times 40}{41}\right\}=22.$$

进而,得$\left[\frac{23\times 1}{41}\right]+\left[\frac{23\times 40}{41}\right]=22$. 同理

$$\left[\frac{23\times k}{41}\right]+\left[\frac{23\times (41-k)}{41}\right]=22\quad (k=1,2,\cdots,20).$$

故 $$原式=22\times 20=440.$$

例7 若$\left[x+\frac{19}{100}\right]+\left[x+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{91}{100}\right]=546$, 试求$[100x]$的值.

解 $\left[x+\frac{19}{100}\right]+\left[x+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[x+\frac{91}{100}\right]$

$=\left[[x]+\{x\}+\frac{19}{100}\right]+\left[[x]+\{x\}+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[[x]+\{x\}+\frac{91}{100}\right]$

$=73[x]+\left[\{x\}+\frac{19}{100}\right]+\left[\{x\}+\frac{20}{100}\right]+\cdots+\left[\{x\}+\frac{91}{100}\right]$

$=546.$

而$\frac{19}{100}\leqslant\{x\}+\frac{19}{100}<2, 0\leqslant\{x\}+\frac{20}{100}<2,\cdots,0\leqslant\{x\}+\frac{91}{100}<2$, 故$\left[\{x\}+\frac{19}{100}\right],\left[\{x\}+\frac{20}{100}\right],\cdots,\left[\{x\}+\frac{91}{100}\right]$等于 0 或 1, 又因 $546=73\times 7+35$, 所以$[x]=7$, 上述各数中有 35 个 1, 38 个 0. 于是

$$\frac{43}{100} \leqslant \{x\} < \frac{44}{100},$$

有 $$700+43 \leqslant 100x = 100[x] + 100\{x\}$$
$$= 100 \times 7 + 100\{x\} < 700 + 44.$$

可得$[100x] = 743$.

例 8 求所有实数 α,使得

$$\left[\sqrt{n+\alpha} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{n} + \frac{1}{2}\right] \qquad ①$$

对一切正整数 n 成立.

分析 令 $n=1$,由①得

$$\left[\sqrt{1+\alpha} + \frac{1}{2}\right] = 1,$$

于是 $$\sqrt{1+\alpha} + \frac{1}{2} \geqslant 1,$$

解得 $\alpha \geqslant -\frac{3}{4}$.

令 $n=2$,由①得

$$\left[\sqrt{2+\alpha} + \frac{1}{2}\right] = 1.$$

于是 $$\sqrt{2+\alpha} + \frac{1}{2} < 2,$$

解得 $\alpha < \frac{1}{4}$.

由上述知 $-\frac{3}{4} \leqslant \alpha < \frac{1}{4}$,以下尝试证明对一切正数数 n,欲①式成立,只须 $-\frac{3}{4} \leqslant \alpha < \frac{1}{4}$.

对任意正整数 n,总存在正整数 t,使得$(t-1)t < n \leqslant t(t+1)$,则

$$\left[\sqrt{n+\alpha} + \frac{1}{2}\right] \geqslant \left[\sqrt{(t^2-t+1) - \frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\right] = \left[t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = t,$$

$$\left[\sqrt{n+\alpha} + \frac{1}{2}\right] < \left[\sqrt{t^2+t+\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\right] = \left[t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = t+1.$$

从而，有 $$t \leqslant \left[\sqrt{n+\alpha}+\frac{1}{2}\right]<t+1,$$

又 $$t \leqslant \sqrt{t^{2}-t}+\frac{1}{2}<\sqrt{n}+\frac{1}{2} \leqslant \sqrt{t^{2}+t}+\frac{1}{2}<t+1,$$

故 $$\left[\sqrt{n+\alpha}+\frac{1}{2}\right]=\left[\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right].$$

综上所述，$-\frac{3}{4} \leqslant \alpha<\frac{1}{4}$.

例 9 实数满足

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1. \qquad ①$$

求证：x 为无理数.

分析一 显然 $x \neq \pm 1$. 若 x 为整数且 $x \neq \pm 1$，则 $\{x\}=0, 0<\left\{\frac{1}{x}\right\}<1$，$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}$不是整数，与①不符.

假设 x 不为整数但为有理数，设 $x=\frac{q}{p}$，$(p, q)=1, p>0$.

（ⅰ）若 $0<q<p$，则 $0<\frac{q}{p}<1$，$p=qs+r$，这里 $S \geqslant 1, 0 \leqslant r \leqslant q-1$，且 $\frac{p}{q}=s+\frac{r}{q}, 0<\frac{r}{q}<1$，故

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{q}{p}+\frac{p}{q}-s=\frac{p^{2}+q^{2}}{pq}-s.$$

因 $(p, q)=1$，故 $pq \nmid p^{2}+q^{2}$，即 $\frac{p^{2}+q^{2}}{pq}$不是整数. 与①不符.

（ⅱ）若 $q<0$，且 $|q|<p$，则 $-1<\frac{q}{p}<0$，$P=-qs+r$，这里 $O<r \leqslant -q-1$，且 $\frac{p}{q}=-s+\frac{r}{q}, -1 \leqslant \frac{r}{q}<0$，所以

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=\frac{q}{p}-1+\frac{p}{q}-(-s-1)$$

不是整数，与①不符.

同理可知，若 $|q|>p$，仍有 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\} \neq 1$.

综上所述，满足①的实数 x 必为无理数.

分析二 由①得

$$x+\frac{1}{x}=[x]+[\frac{1}{x}]+1$$

为整数.令 $x+\frac{1}{x}=k$(k 为整数),则

$$x^2-kx+1=0.$$

由 $\Delta=k^2-4\geqslant 0$,可知 $|k|\geqslant 2$.

若 $|k|\geqslant 3$,则 $x=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{k^2-4})$.若 x 为有理数,则 k^2-4 为完全平方数.令 $k^2-4=h^2$,

有 $$k^2-h^2=4.$$

但 $|k|\geqslant 3$ 时,两平方数之差不小于5,矛盾.

综上所述,满足①的实数 x 必为无理数.

练　习　十

1. 解方程:$[3x+1]=2x-\frac{1}{2}$.

2. 解方程 $[x]^2=\{x\}\cdot[x]$.

3. 满足 $[-1.77x]=[-1.7]x$ 的整数有多少个?

4. 已知 $[x]=[y]$,求证:$|x-y|<1$.

5. 解方程 $[x^3]+[x^2]+[x]=\{x\}-1$.

6. 设 $n>2$,n 为正整数,求证:

$$[\frac{n(n+1)}{4n-2}]=[\frac{n+1}{4}].$$

7. 已知 n 为正整数,求方程

$$x^2-[x^2]=(x-[x])^2$$

在 $1\leqslant x\leqslant n$ 中根的个数.

8. 解方程 $[\frac{6x+5}{8}]=\frac{15x-7}{5}$.

9. 解方程组 $\begin{cases}3[x]+2(y-[y])=7,\\3(x-[x])-[y]=4.\end{cases}$

10. 对任何正整数 n，求证：

(1) $[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}]$；

(2) 若 $x>0$，则 $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$.

11. 在前 1000 个正整数中，可以表示成下列形式

$$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$$

的正整数有多少个？

12. $\left[\frac{1^2}{1980}\right],\left[\frac{2^2}{1980}\right],\cdots,\left[\frac{1980^2}{1980}\right]$中，含有多少个互不相同的非负整数？

第十一讲　同　余

知识点和方法述要

1. 设 m 是一个给定的正整数，如果两个整数 a 与 b 用 m 除所得的余数相同，则称 m 为模，且称 a 与 b 对模 m 同余，记作

$$a \equiv b(\bmod \quad m).$$

否则，就说 a 与 b 对模 m 不同余，记作

$$a \not\equiv b(\bmod \quad m).$$

显然，有

$$a \equiv b(\bmod \quad m) \Leftrightarrow a = km + b(k \in Z) \Leftrightarrow m \mid a - b$$

每一个整数 a 恰与 $1,2,\cdots,m-1$，这 m 个数中的某一个同余.

2. 同余的基本性质

(1)　反身性 $(a \equiv b)(\bmod \quad m)$；

(2)　对称性 $(a \equiv b)(\bmod \quad m) \Rightarrow b \equiv a(\bmod \quad m)$.

(3)　传递性 $a \equiv b(\bmod \quad m)$，$b \equiv c(\bmod \quad m)$，则 $a \equiv c(\bmod \quad m)$.

(4)　可加性若 $a_1 \equiv b_1$，$(\bmod \quad m)$，$a_2 \equiv b_2(\bmod \quad m)$，则

$$a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2(\bmod \quad m)$$

特别地，$a \equiv b(\bmod \quad m) \Rightarrow a+k \equiv b+k(\bmod \quad m)$.

(5)　可乘性 $a \equiv b(\bmod \quad m)$，$c$ 为整数 $\Rightarrow ac \equiv bc(\bmod \quad m)$.

推论 1　$a \equiv b(\bmod \quad m)$，$c \equiv d(\bmod \quad m) \Rightarrow ac \equiv bd(\bmod \quad m)$.

推论 2　$a \equiv b(\bmod \quad m) \Rightarrow a^n \equiv b^n(\bmod \quad m)$.

3. 从同余性质可以看出，同余式具有一些等式类似性质，利用同余的概念、性质、结合代数变形的技巧可以巧妙地解决不少有关整数问题，如关于整除问题常可用分解的办法、将整数按适当的模数分类，区分情况进行讨论. 又两个相等的数除以任何正常数所得的余数必相等，若能选择适当的模数，使某两个数取模后不等，则表明这两

数决不会相等.

用同余处理问题,关键在于合理选择模数,而这应视具体问题而定.

例 题 精 讲

例1 求证:$13 \mid 25^{2001}+14^{2001}$.

证明 因

$$25 \equiv -1(\bmod 13),$$

故
$$25^{2001} \equiv (-1)^{2001} \equiv -1(\bmod\ 13).$$

又
$$14 \equiv 1(\bmod 13),$$

有
$$14^{2001} \equiv 1^{2001} \equiv 1(\bmod\ 13).$$

因此,可知

$$25^{2001}+14^{2001} \equiv -1+1 \equiv 0(\bmod\ 13).$$

即 $13 \mid 25^{2001}+14^{2001}$.

例2 a 除以5余1,b 除以5余4,且 $a^3>b$,求 $3a-b$ 除以5的余数.

解 依题设,有 $a \equiv 1(\bmod 5)$,$b \equiv 4(\bmod 5)$,故 $3a \equiv 3(\bmod 5)$,$-b \equiv -4(\bmod\ 5)$,于是

$$3a-b \equiv 3-4 \equiv -1 \equiv 4(\bmod\ 5).$$

$3a-b$ 除以5所得余数为4.

例3 证明:$2903^n-803^n-464^n+261^n$(n 为正整数)可被1897整数.

分析 注意到 $1897=7\times 271$,且 $(7,271)=1$,而 $7 \mid 2903-803$,$7 \mid 464-261$,$271 \mid 803-261$,$271 \mid 2903-464$,可得

$$2903^n \equiv 803^n \quad (\bmod\ 7),$$

$$464^n \equiv 261^n \quad (\bmod\ 7),$$

$$803^n \equiv 261^n \quad (\bmod\ 271),$$

$$2903^n \equiv 464^n \quad (\bmod\ 271),$$

进而有

$$2903^n - 803^n - 464^n + 261^n \equiv 0 \pmod{7},$$

$$2903^n - 464^n - 803^n + 261^n \equiv 0 \pmod{271},$$

故 $1897 \mid 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$.

例 4 试找出最小的正整数 n,使它的立方的末三位数是 888.

解 注意到 n^3 的个位数为 8,可令 $m = 10k + 2$(k 为正整数),于是

$$n^3 \equiv (10k+2)^3 = 1000k^3 + 600k^2 + 120k + 8,$$

$$n^3 \equiv 888 \pmod{100} \Leftrightarrow 20k + 8 \equiv 88 \pmod{100}$$

$$\Leftrightarrow k \equiv 4 \pmod{5}.$$

设 $k = 5m + 4$(m 为非负整数),则

$$n^3 \equiv 600 \times 4^2 + 120(5m+4) + 8 \equiv 600m + 88 \equiv 888 \pmod{1000}$$

可见 m、n 的最小值分别 3,192.为满足题设要求的最小正整数 n 为 192.

例 5 m, n 是正整数,证明:$3^m + 3^n + 1$ 不可能是完全平方数.

证明 因 $3^m + 3^n + 1$ 是奇数,若它是一个完全平方数,则它是一个奇数的平方,被 8 除余数为 1,因此,有

$$3^m + 3^n \equiv 0 \pmod{8}, \quad ①$$

但对任一正整数 k

$$3^k \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod{8}.$$

故①不能成立,所以命题成立.

例 6 设 x 是一个 n 位数,问:是否总存在非负整数 y, z,使得 $y \leqslant 9$ 且 $10^{n+1}z + 10x + y$ 是一个完全平方数?

解 不一定,取 $x = 111$,当 $y \leqslant 9$ 时,因 y、z 均为非负整数,$10^4z + 1110 + y$ 不会成为一个完全平方数,若不然,设

$10^4z + 1110 + y = k^2$ (k 为正整数),

则
$$k^2 \equiv y + 6 \pmod{8}, \quad ①$$

y 是一个完全平方数的个位数,只能是 0,1,4,5,6,9,其中仅当 $y = 6$

时满足①式,此时 k 为偶数,设 $k=2l$(l 为正整数),则

$$4l^2 \equiv 1116 \pmod{10^4},$$

$$l^2 \equiv 279 \pmod{2500},$$

因此,有

$$l^2 \equiv 3 \pmod{4}.$$

这不可能,故回答是否定的.

例 7 证明:关于 m,n 的方程

$$5m^2-6mn+7n=1987 \qquad ①$$

无整数解.

分析 如果对任意的整数,方程的两边对某一特定的模不同余,则方程必然没有整数解.因此,可从这方面作一尝试.

假设存在整数 m,n 满足①,则由可得

$$4m^2+(m-3n)^2-2n^2=1987, \qquad ②$$

注意到②式右边为奇数,故 $m-3n$ 为奇数.

若 n 为奇数,则 m 为偶数,于是 $4m^2\equiv 0 \pmod 8$,$(m-3n)^2\equiv 1 \pmod 8$,$2n^2\equiv 2 \pmod 8$.于是

$$4m^2+(m-3n)^2-2n^2\equiv 0+1-2\equiv -1 \pmod 8,$$

而 $1987\equiv 3 \pmod 8$,②式左右两边对模 8 不同余,矛盾.

因此,原方程无整数解.

例 8 已知 m,n 为正整数,求 $|12^n-5^m|$ 的最小值.

解 首先,$|12^m-5^n|$ 是奇数,且不可能为 3,5.因

$$12^m-5^n\equiv 0-1^n\equiv -1 \pmod 4,$$

故 $12^m-5^n\neq 1$.如果

$$5^n-12^m=1,$$

则 $$5n-12^m\equiv 5^n\equiv (-1)^n=1 \pmod 3,$$

可知 n 为偶数.设 $n=2k$(k 为正整数),又因

$$5^n-12^m=-2^m\equiv 2^{m+2}\equiv 1 \pmod 5,$$

故 $m=4k+2$(k 为非负整数),于是

$$5^n-12^m=(5^k)^2-(12^{k+1})^2=(5^k+12^{2k+1})(5^k-12^{2k+1})>1,$$

矛盾.因此,$|12^m - 5^n| \geq 7$.

取 $m = n = 1$,有 $12^m - 5^n = 7$.

综上所述,所求最小值为7.

例9 如图11-1所示,一枚棋子放在五角棋角盘的0位上,现依逆时针方向按下列规律移动:第1次移动一格,第2次移动二格,…,第n次移动n格.求证:不论棋子连续移动多少次,在第2、第4格上总没有停棋的可能.

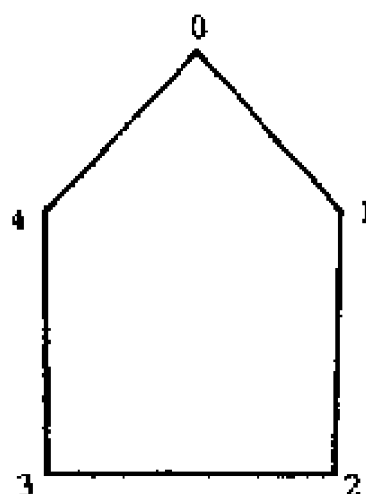


图11-1

证明 如11-1,设在0号位上的棋子连续移动了n次,这时棋子共走了

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}(格)$$

不论连续走多少次,棋子所在位置应是所走格数被5除的余数,因此问题即为$\frac{n(n+1)}{2}$被5除时,余数不可能为2和4.

由于 $n \equiv r(\text{mod}5), 0 \leq r \leq 4$,那么

$$\frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{r(r+1)}{2}(\text{mod} \quad 5),$$

当r分别取0,1,2,3,4时,$\frac{r(r+1)}{2} \equiv 0,1,3(\text{mod} \quad 5)$,故第2、第4格上总没有停棋的可能.

练 习 十 一

一、填空题

1. 2^{2001}除以9,余数是___.

2. 3^{2n+1}除以8,余数是____.

3. 19^{1996}除以17,余数是____.

4. 设 $x = 1 \times 1990 + 2 \times 1990 + 3 \times 1990 + \cdots + 1990 \times 1990$,则 x

被 9 除的余数是______.

5. 2^{999}的末两位数是______.

二、解答题

6. 对于十进制整数 $N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$,若 $8 \mid 4a_2+2a_1+a_0$,求证:$8 \mid N$.

7. 求证:对于任意奇数 n,数 $1^{2001}+2^{2001}+3^{2001}+\cdots+n^{2001}$不能被 $n+2$ 整除.

8. 证明:对于正整数 n,当且仅当 $4 \nmid n$ 时,$5 \mid 1^n+2^n+3^n+4^n$.

9. 在数 3000003 中,应把它的百位数字和万位数字 0 换成什么数字,才能使所得的数能被 13 整除?

10. 求 $N=1\times3\times5\times\cdots\times1997\times1999$ 的末三位数.

11. 试求一切正整数 n,使得 $1986^n+1987^n+1988^n+1989^n$ 的个位数字不是 0.

12. 如果一个自然数是素数,并且任意重排它的数字后所得的数仍是素数,那么这个自然数叫做绝对素数. 证明:在绝对素数中不能含有多于三个不同的数字.

第十二讲　圆的基本性质

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 圆是到定点的距离等于定长的点的集合.不在同一直线上的三个点确定一个圆.圆是轴对称图形.任何一条直径都是对称轴.圆又是以圆心为中心的中心对称图形.

2. 垂径定理　垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的两条弧.

推论1　(1)平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧;(2)弦的垂直平分线经过圆心,并且平分弦所对的两条弧;(3)平分弦所对的一条弧的直径,垂直平分弦,并且平分弦所对的另一条弧.

推论2　圆的两条平行弦所夹的弧相等.

3. 一条弦所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

在同圆或等圆中,等圆心角$\Leftrightarrow$等弧$\Leftrightarrow$等弦$\Leftrightarrow$等弦心距.

4. 过$\triangle ABC$三顶点的圆又称$\triangle ABC$的外接圆.通过添加$\triangle ABC$的外接圆,有利于利用圆的性质导致有关$\triangle ABC$的某些问题的解决.

例 题 精 讲

例1　直径A_0A_5把$\odot O$分成两个半圆,再把其中一个半圆分成五段等弧$\overset{\frown}{A_0A_1}$、$\overset{\frown}{A_1A_2}$、$\overset{\frown}{A_2A_3}$、$\overset{\frown}{A_3A_4}$、$\overset{\frown}{A_4A_5}$,直线A_1A_4交OA_2、OA_3于点M、N.证明:线段A_2A_3和MN长度之和等于圆的半径.

证明　如图12-1,连OA_1、A_1A_2、MA_3、A_2A_3.因$A_0A_5 /\!/ A_1A_4 /\!/ A_2A_3$,$A_1A_2=A_2A_3$,故$\angle A_1MA_2=\angle OMN=\angle OA_2A_3=\angle A_1A_2M$,故$A_1M=A_1A_2=A_2A_3$.于是四边形$A_1A_2A_3M$为平行四边形,可得

$\angle A_2A_3M=\angle A_2A_1M=36°$. $MA_3=A_1A_2=A_2A_3$，进而得$\angle MA_3O=\angle A_3MN=36°$，可知$MN=NA_3$，$MA_3=MO=ON$，所以

$$A_2A_3+MN=ON+NA_3=OA_3.$$

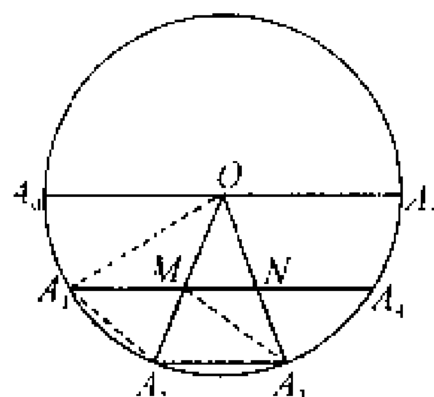


图 12－1

例 2 如图 12－2，AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$，交于 G，E 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上，直线 AE 与 CD 交于 F，$\dfrac{CF}{CG}=\dfrac{AF}{AG}$，求证：$AB\cdot CD=2AE\cdot CF$.

分析 $AB\cdot CD=2AE\cdot CF$

$$\Uparrow CG=\frac{1}{2}CD$$

$$AB\cdot CG=AE\cdot CF$$

$$\Uparrow \frac{CF}{CG}=\frac{AF}{AG}$$

$$\frac{AB}{AE}=\frac{AF}{AG}$$

$$\Uparrow$$

$$\triangle AGF\backsim\triangle AEB$$

（连结 BE）

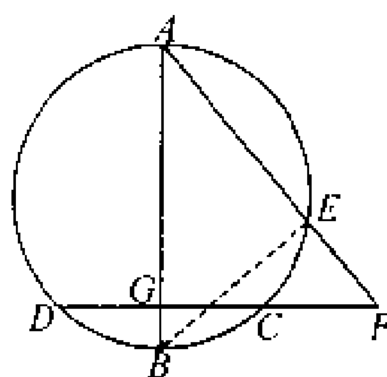


图 12－2

例 3 如图 12－3，AB 是⊙O 的直径，半径 $OC\perp AB$，过 OC 的中点 D 作 $EF/\!/AB$，求证：$\angle ABE=\dfrac{1}{2}\angle CBE$.

分析 $OC\perp AB$，$EF/\!/AB$

D 为 OC 中点

$$\Downarrow$$

EF 垂直平分 OC

连结 OE、EC $\Downarrow$

$$OE=EC$$

$$\Downarrow$$

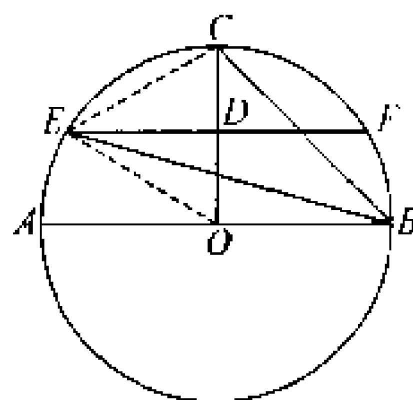


图 12－3

$$\triangle OCE \text{ 为正三角形} \Rightarrow \angle BOE = 150^\circ$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow OB = OE$$

$$\angle CBE = \frac{1}{2}\angle COE = 30^\circ \qquad \angle ABE = 15^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\angle ABE = \frac{1}{2}\angle CBE$$

例 4 如图 12－4，过▱$ABCD$ 的顶点 A 任作一圆分别交 AB、AC、AD 于 E、F、G，求证：$AF \cdot AC = AE \cdot AB + AG \cdot AD$.

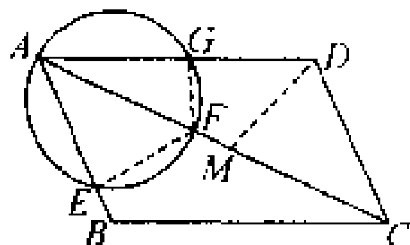


图 12－4

分析 设想

$AF(? \ \ +?) = AE \cdot AB + AG \cdot AD$,

尝试在 AC 上取一点 M，首先满足

$$AF \cdot AM = AG \cdot AD$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AM}.$$

连结 GF

$$\Leftrightarrow \quad \triangle AFG \backsim \triangle ADM.$$

为此，可作$\angle ADM = \angle AFG$. 余下的须证明：

$$AF \cdot MC = AE \cdot AB$$

$$\Uparrow CD = AB$$

$$\frac{AF}{AE} = \frac{CD}{CM}$$

$$\Uparrow$$

$$\triangle AEF \backsim \triangle CDM$$

$$\Uparrow$$

$$\angle EAF = \angle DCM \quad \angle AEF = DMC \Leftarrow \left[\begin{array}{l} \angle AGF + \angle AEF = 180^\circ \\ \angle AGF = \angle AMD \\ \angle DMC + \angle AMD = 180^\circ \end{array}\right.$$

例 5 如图 12－5，在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$\angle ABC = 90^\circ$，以 AD 为直径的圆交 BC 于 E. 求证：

(1) $AB \cdot DE + BE \cdot AE = BC \cdot AE$.

(2) $BE \cdot DE = CD \cdot AE$.

分析一 (1)因 AD 为直径,故$\angle AED = 90°$,又$\angle ABC = 90°$,故$\angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = 90°$,有$\angle 1 = \angle 3$.又$\angle C = \angle B = 90°$,所以 $\triangle ECD \backsim \triangle ABE$,有$\frac{EC}{AB} = \frac{DE}{AE}$,于是

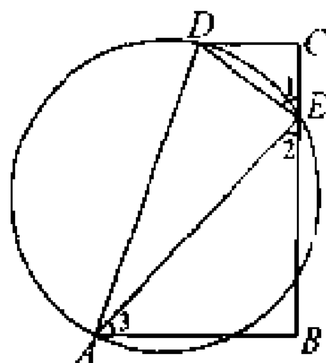


图 12-5

$$AB \cdot DE = AE \cdot EC = AE(BC - BE)$$
$$= AE \cdot BC - AE \cdot BE,$$

故 $\quad AB \cdot DE + BE \cdot AE = BC \cdot AE$.

(2)因 $\triangle ECD \backsim \triangle ABE$,故$\frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CD}$,即 $BE \cdot DE = CD \cdot AE$.

分析二 $\quad$ ①$\Leftrightarrow \frac{DE}{AE} + \frac{BE}{AB} = \frac{BC}{AB}$,

②$\Leftrightarrow \frac{DE}{AE} \cdot \frac{BE}{AB} = \frac{CD}{AB}$.

于是,可构作一元二次方程

$$x^2 - \frac{BC}{AB}x + \frac{CD}{AB} = 0, \qquad ①$$

若能证明$\frac{BE}{AB}$、$\frac{DE}{AE}$是该方程的根,命题即可获证.

由 $\triangle ECD \backsim \triangle ABE$,可得$\frac{AB}{BE} = \frac{CE}{CD}$,即 $AB \cdot CD - BE \cdot CE = 0$,因此,有

$$\left(\frac{BE}{AB}\right)^2 - \frac{BC}{AB} \cdot \frac{BE}{AB} + \frac{CD}{AB}$$
$$= \frac{BE}{AB^2}(BE - BC) + \frac{CD}{AB} = \frac{CD}{AB} - \frac{BE \cdot CE}{AB^2}$$
$$= \frac{1}{AB^2}(CD \cdot AB - BE \cdot CE) = 0.$$

这表明$\frac{AE}{AB}$是方程①的根.同理$\frac{DE}{AE}$也是①的根.

例 6 已知⊙O 的半径 $r = 4$,AB、CD 为⊙O 的两条弦,AB、CD

的长分别是方程

$$x^2-(4\sqrt{3}+4)x+16\sqrt{3}=0$$

的两根，其中 $AB>CD$，且 $AB/\!/CD$，求 AB 与 CD 间的距离.

解 由方程

$$x^2-(4\sqrt{3}+4)x+16\sqrt{3}=0$$

解得两根 $x_1=4\sqrt{3}$，$x_2=4$，因 AB、CD 为方程两根，且 $AB>CD$，故 $AB=4\sqrt{3}$，$CD=4$. 作 $OF\perp CD$ 于 F，因 $AB/\!/CD$，故 $OF\perp AB$，垂足为 E.



图 12－6

（ⅰ）若 AB、CD 位于圆心 O 的同侧（如图 12－6），则 AB、CD 间距离为 $EF=OF-OE$，连接 OD、OB，则 $OD=OB=r=4$，$DF=\dfrac{1}{2}CD=2$，$BE=\dfrac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$，所以

$$OF=\sqrt{OD^2-DF^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3},$$

$$OE=\sqrt{OB^2-BE^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2.$$

可得 $EF=2\sqrt{3}-2$.



图 12－7

（ⅱ）若 AB、CD 位于圆心 O 的异侧（如图 12－7），则 AB、CD 间的距离为

$$EF=OE+OF=2\sqrt{3}+2.$$

例 7 一个机器零件的形状是一个有缺口的圆（如图 12－8），这个圆的半径是 $\sqrt{50}$cm，AB 的长度是 6cm，BC 的长度是 2cm，$\angle ABC=90°$，求 B 与圆心的距离.



图 12－8



图 12－9

解 如图 12－9，补成圆 O，连 AC，延长 AB 交$\odot O$于 D，连 OA、OB，作 $OE \perp AC$、$OF \perp AB$，垂足分别为 E、F.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}(\text{cm})$，$AE=\frac{1}{2}AC=\sqrt{10}(\text{cm})$. 在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，$OE=\sqrt{(\sqrt{50})^2-(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{10}(\text{cm})$，$\tan\angle AOE=\frac{AE}{OE}=\frac{1}{2}$.

连 CD，$\angle BDC=\angle AOE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，故 $\tan\angle BDC=\frac{1}{2}$，由 $BC=2(\text{cm})$，得 $BD=4(\text{cm})$，于是 $AD=AB+BD=10(\text{cm})$，$DF=5(\text{cm})$，$BF=1(\text{cm})$. 故

$$OF^2=OA^2-AF^2=(\sqrt{50})^2-5^2=25(\text{cm}^2),$$

有
$$OB=\sqrt{OF^2+BF^2}=\sqrt{26}(\text{cm}).$$

即为所求.

例 8 如图 12－10，$AB=BC=CA=AD$，$AH \perp CD$，垂足 H. $CP \perp BC$ 交 AH 于 P，且 $AP \cdot BD=1$，求 AB 的长.

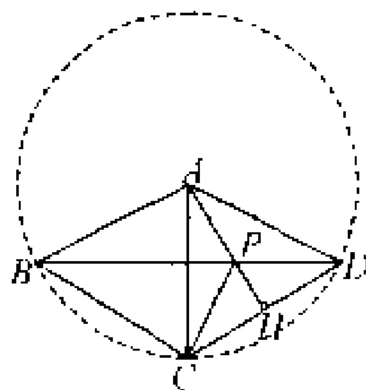


图 12－10

解 因 $AB=AC=AD$，故可以 A 为圆心、AB 为半径作圆，则 B、C、D 三点均在$\odot A$ 上. 由 $AB=BC=CA$ 知 $\triangle ABC$ 为等边三角形，$\angle BAC=60°$，$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BAC=30°$. 因 $CP \perp BC$，故

$$\angle ACP=\angle BCP-\angle ACB=90°-60°=30°.$$

于是$\angle BDC=\angle ACP$. 又$\angle CAD=2\angle CBD$，$AC=AD$，$AH \perp CD$，可得$\angle CBD=\angle PAC=\frac{1}{2}\angle CAD$. 于是 $\triangle ACP \backsim \triangle BDC$，有$\frac{AP}{BC}=\frac{AC}{BD}$. 所以

$$AB^2=AC \cdot BC=AP \cdot BD=1.$$

可得 $AB=1$.

例 9 设 P、Q 为线段 BC 上两定点，且 $BP=CQ$，A 为 BC 外一动点. 当点 A 运动到使$\angle BAP=\angle CAQ$ 时，$\triangle ABC$ 是什么三角形？试

证明你的结论.

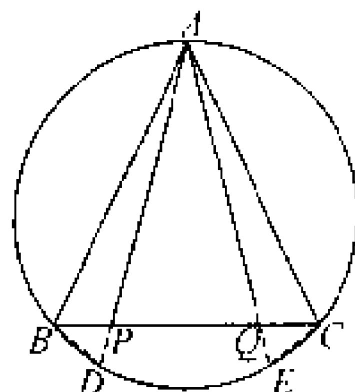


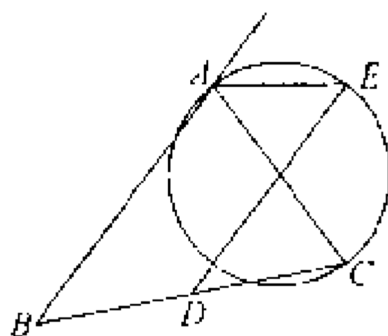
图 12 - 11

解 如图 12 - 11,作 $\triangle ABC$ 的外接圆,直线 AP、AQ 交该圆于 D、E,连结 BD、CE.因$\angle BAP=\angle CAQ$,故 $BD=CE$.于是 $\overset{\frown}{DEC}=\overset{\frown}{BDE}$,$\angle CBD=\angle BCE$.又 $BP=CQ$,故 $\triangle BPD\cong\triangle CQE$,有$\angle BDP=\angle CEQ$,$AB=AC$,$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

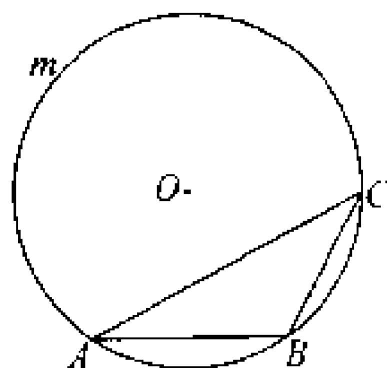
练 习 十 二

一、填空题

1. 如图,$\triangle ABC$ 中,$AB=8$,$AC=6$,以 AC 为直径作圆交$\angle A$ 的外角平分线于E,D 为 BC 的中点,则 $DE=$________.



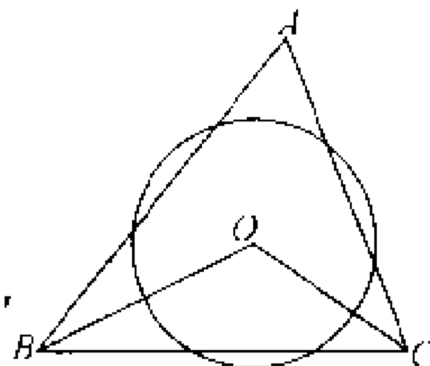
(第 1 题)



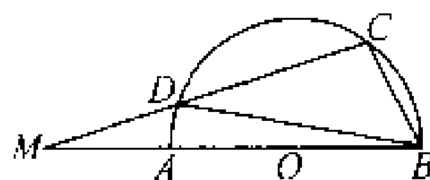
(第 2 题)

2. 如图,弦 AB 的长等于$\odot O$ 的半径,如果 C 是$\overset{\frown}{AmB}$上任意一点,则 $\sin C=$________.

3. 如图,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=70°$,$\odot O$ 截$\triangle ABC$ 的三边所截得的弦长都相等,则$\angle BOC=$________.



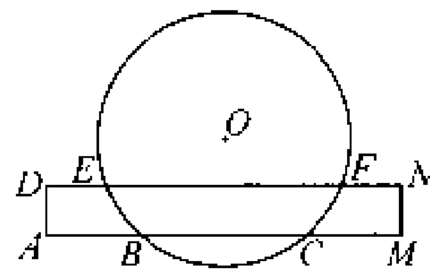
(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图,AB 是半圆 O 的直径,若$\angle M=20°$,$\angle CBD=40°$,则$\angle BDC=$________.

5. 如图,矩形 $AMND$ 的边与$\odot O$ 相交,$AB=4$,$BC=6$,$DE=3$,$AD=1$,则$\odot O$ 的半径长=________.

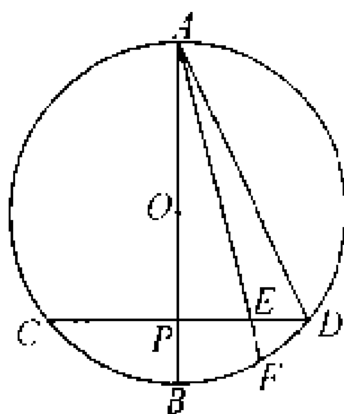


(第 5 题)

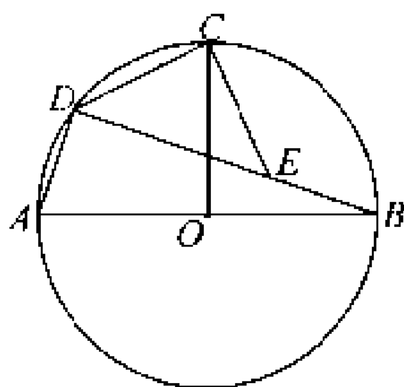
二、解答题

6. 如图,AB 是$\odot O$ 的直径,弦 $CD\perp AB$,垂足为 P,弦 AF 交 CD 于 E,求证:$AD^2=AE\cdot AF$.

7. $\odot O$ 中,弦 AB 与弦 CD 交于点 P,且 $AB\perp CD$,求证:$PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ 为一定值.



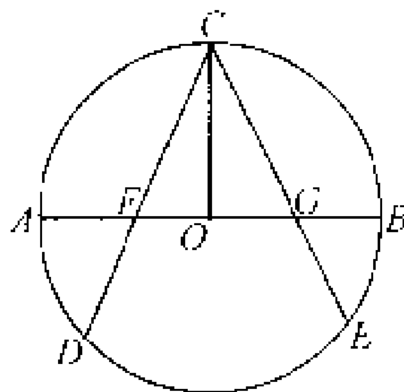
(第 6 题)



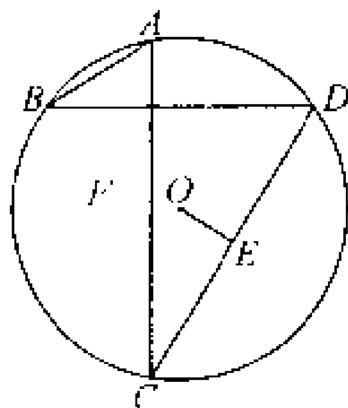
(第 8 题)

8. 如图,AB 是$\odot O$ 的直径,半径 $OC\perp AB$. D 为$\overset{\frown}{AC}$上任一点,E 为弦 BD 上一点,且 $BE=AD$.求证:$\triangle CDE$ 为等腰直角三角形.

9. 如图,$\odot O$ 中,半径 $OC\perp$直径 AB,弦 CD、CE 分别交 AB 于 F、G,求证:$CF\cdot CD=CG\cdot CE$.



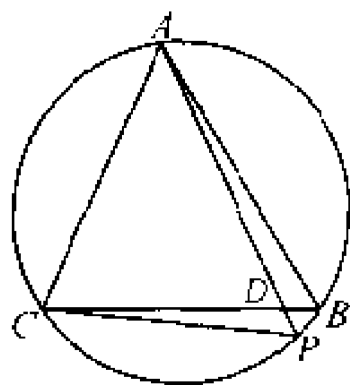
(第 9 题)



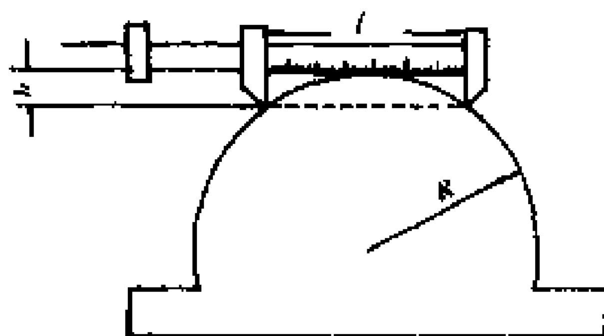
(第 10 题)

10. 如图，$\odot O$ 中，弦 $AC \perp BD$，又 $OE \perp CD$ 于 E，求证：$OE = \frac{1}{2}AB$.

11. 如图，P 是等边 ΔABC 外接圆的 $\overset{\frown}{BC}$ 上的任意一点，AP 交 BC 于 D，求证：$PA^2 = AC^2 + PB \cdot PC$.



（第 11 题）



（第 12 题）

12. 如图，一个工件的直径为 D，可以用卡尺在工件上量得弓形的弦长 l、弓形高 h，就可以用下面公式计算工件的直径 D：$D = \frac{l^2 + 4h^2}{4h}$，这是什么道理？

若量得 $l = 220\text{mm}$，$h = 50\text{mm}$，求 D.

13. 在 ΔABC 中，$AB = AC$，D 是底边 BC 上一点，E 为线段 AD 上一点，且 $\angle BED = 2\angle CED = \angle A$，求证：$BD = 2CD$.

第十三讲　圆内接四边形、四点共圆

知识点和方法述要

1. 如果一个多边形的所有顶点都在同一个圆上，这个多边形叫做圆内接多边形，这个圆叫做这个多边形的外接圆．我们研究比较多的是圆内接四边形．

2. 圆内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角．

3. 托勒密定理　若四边形 $ABCD$ 内接于圆，则 $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$．

证明　如图 13－1，作 $\angle BAM = \angle CAD$，AM 交 BD 于 M，因 $\angle ABD = \angle ACD$，故 $\triangle ABM \backsim \triangle ACD$，有 $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CD}$，即 $AB \cdot CD = AC \cdot BM$，且 $\angle MAD = \angle BAC$，又 $\angle ADM = \angle ACB$，所以 $\triangle ADM \backsim \triangle ACB$，可得 $\frac{AD}{DM} = \frac{AC}{CB}$，即 $AD \cdot BC = AC \cdot DM$．所以

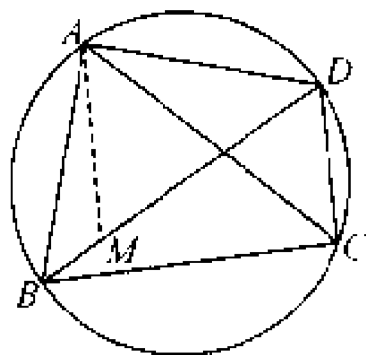


图 13－1

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = (DM + BM) \cdot AC = AC \cdot BD.$$

利用托勒密定理可以简捷地处理不少与圆内接四边形有关问题．

4. 判定平面上四个点共圆（即在同一圆周上）的两个重要定理：

（1）如果四边形的对角互补或其一个外角等于它的内对角，则四边形的四个顶点共圆．

（2）有公共底边且顶点在公共边的同侧的两个三角形的顶角相等，则它们的四个顶点共圆．

例题精讲

例1 如图13-2,正方形 $ABCD$ 内接于⊙O,P 是 $\overset{\frown}{AD}$ 上任意一点,求证:$\frac{PA+PC}{PB}$ 是定值.

分析 注意到点 P 的任意性,当点 P 与 A、D 重合时,均有 $\frac{PA+PC}{PB}=\sqrt{2}$,为此,猜测题中所言及的定值是 $\sqrt{2}$.

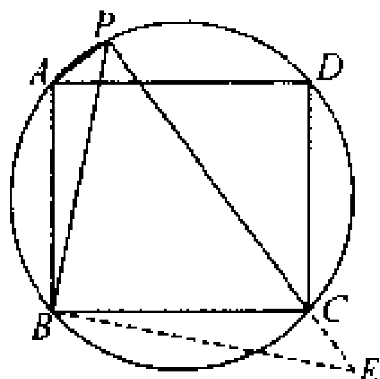


图 13-2

延长 PC 至 E,使 $CE=PA$,则 $PE=PA+PC$,且 $\angle BCE=\angle BAP$,$BC=AB$,有 $\triangle BCE\cong\triangle BAP$,可得 $BP=BE$,$\angle ABP=\angle CBE$. 进而知 $\angle PBE=\angle ABC=90°$,$\triangle PBE$ 为等腰直角三角形. 于是

$$\frac{PA+PC}{PB}=\frac{PE}{PB}=\sqrt{2}.$$

例2 如图13-3,四边形 $ABCD$ 内接于圆边,AC、BD 交于 M,且 $AC\perp BD$,E 是 CD 中点,$OH\perp AB$ 于 H,求证:$EM\perp AB$,$OH=ME$.

证明 延长 EM 交 AB 于 F. 因 $BD\perp AC$,$CE=ED$,故 $EM=EC$,有 $\angle 2=\angle 3$,又 $\angle 1=\angle 2$,$\angle 4=\angle 5$,故 $\angle 1+\angle 4=\angle 3+\angle 5=90°$,即 $\angle MFA=90°$,可知 $EM\perp AB$.

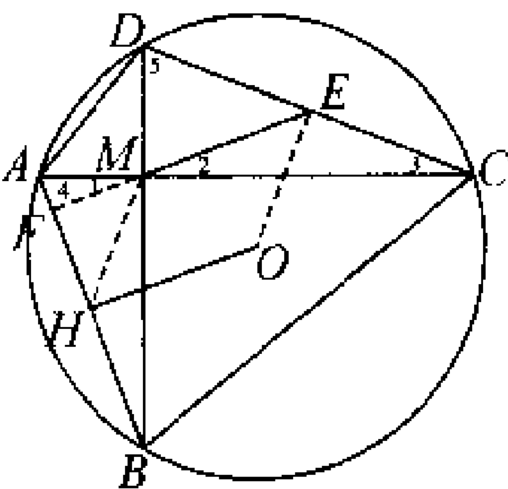


图 13-3

连接 MH、OE,易知 H 是 AB 的中点. 同理 $HM\perp CD$. 又 $OE\perp CD$,故 $HM\parallel OE$. 同理 $EM\parallel OH$. 于是四边形 $OHME$

是平行四边形，有 $OH=ME$.

例 3 如图 13－4，已知圆内接四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 DC 的延长线交于 M，AD 和 BC 的延长线交于 N，MH、NE 分别为 $\triangle AMD$ 和 $\triangle ANB$ 的角平分线.求证：$EH /\!/ BD$.

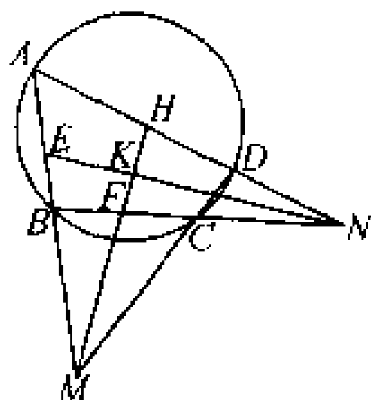


图 13－4

分析 $EH /\!/ BD$

⇑

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AH}{HD}$$

NE 平分 $\angle ANB$ ⇑　　⇑ MH 平分 $\angle AMD$

$$\frac{AN}{BN}=\frac{AM}{DM}$$

与右边类似 ⑊　　⫽ $\triangle AMC \backsim \triangle DMB$

$$\frac{AC}{BD}$$　　⇑

（连结 AC）

$\angle CAM=\angle BDM$

$\angle AMC=\angle DMB$

例 4 如图 13－5，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，外接圆圆心为 O，菱形 $PQRS$ 内接于梯形 $ABCD$，顶点 P、Q、R、S 分别在 AB、BC、CD、DA 上.证明：Q、S、O 三点共线。

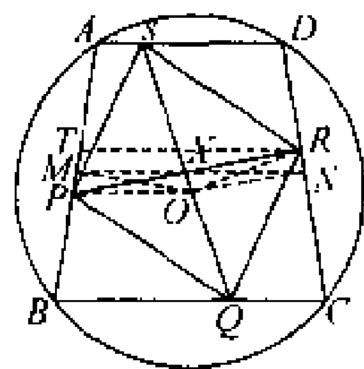


图 13－5

证明 如图 13－5，设 M、N 分别是 AB、CD 的中点，连结 MN，则 $MN /\!/ BC$.记 PR 与 QS 的交点为 X，则 X 在 MN 上.连结 OM、ON、OP、OR，作 $RT /\!/ BC$，交 AB 于 T.因 $PX=XR$，$PM=MT=RN$，$\angle OMP=\angle ONR=90°$，故 $\mathrm{Rt}\triangle OMP \cong \mathrm{Rt}\triangle ONR$，有 $OP=OR$，即 OX 垂直平分 PR，于是 Q、S、O 三点共线.

例5 如图 13－6，在圆周内部有一凸四边形，其边的延长线交圆周于点 A_1、A_2、A_1、B_1、B_2、C_1、C_2、D_1、D_2，证明：若 $A_1B_2=B_1C_2=C_1D_2=D_1A_2$，其由直线 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2 所围成的四边形是圆内接四边形.

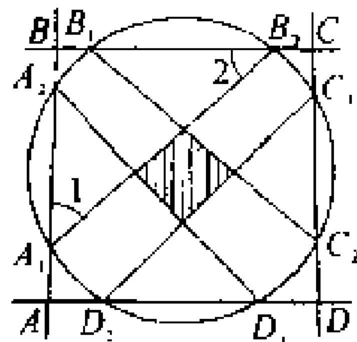


图 13－6

证明 设弦 A_1B_2 所对弧的度数为 α，则 B_1C_2、C_1D_2、D_1A_2 所对弧的度数也为 α，于是

$$\angle ABC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$$

$$\overset{m}{=}180^\circ-\frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_2B_2}+\overset{\frown}{A_1B_1})$$

$$\overset{m}{=}180^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\overset{\frown}{A_2B_1}).$$

同理 $\angle ADC\overset{m}{=}180^\circ-\frac{1}{2}(\alpha+\overset{\frown}{C_2D_1})$.

于是，有

$$\begin{aligned}\angle ABC+\angle ADC&=360^\circ-\frac{1}{2}(2\alpha+\overset{\frown}{A_2B_1}+\overset{\frown}{C_2D_1})\\&=360^\circ-\alpha-\frac{1}{2}(\overset{\frown}{A_2B_1}+\overset{\frown}{C_2D_1})\\&=360^\circ-\alpha-\frac{1}{2}(360^\circ-2\alpha)\\&=180^\circ.\end{aligned}$$

所以，直线 A_1A_2、B_1B_2、C_1C_2、D_1D_2 所围成的四边形是圆内接四边形.

例6 如图 13－7，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$. 任意延长 CA 至 P，再延长 AB 至 Q，使 $AP=BQ$. 求证：$\triangle ABC$ 外接圆圆心 O 与 A、P、Q 四点共圆.

证明 连结 OA、OB、OC、OP、OQ. 因 $AB=AC$，$OB=OC$，故 OA 是OC 对称轴，$\angle OAB=\angle OAC$，而$\angle OAB=\angle OBA$，于是$\angle OAC=\angle OBA$，进而有$\angle OAP=\angle OBQ$，又 $OA=OB$，$AP=BQ$，故 $\triangle OAP\cong\triangle OBQ$，有$\angle APO=\angle BQO$. 所以，$O$、$A$、$P$、$Q$ 四点共圆.

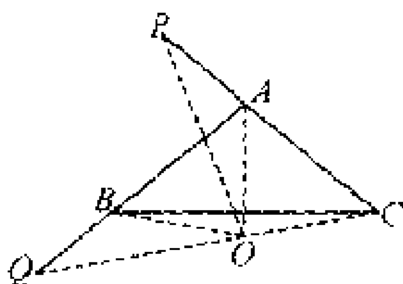


图 13－7

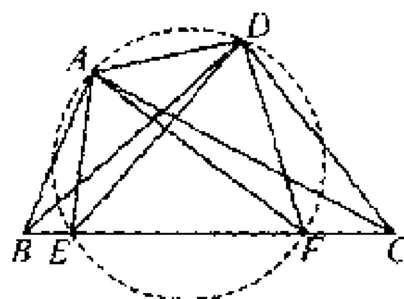


图 13－8

例 7　在凸四边形 $ABCD$ 的 BC 边上取两点 E、F，E 比 F 离 B 更近，如果$\angle BAE=\angle CDF$，且$\angle EAF=\angle FDE$，证明：$\angle FAC=\angle EDB$.

证明　因$\angle EAF=\angle FDE$，故 A、D、F、E 四点共圆（如图 13－8）．有$\angle EAD+\angle EFD=180^\circ$，又

$$\angle BAD=\angle BAD+\angle EAD,$$

$$\angle DCB=\angle DFE-\angle CDF,$$

及$\angle BAE=\angle CDF$，故$\angle BAD+\angle BCD=180^\circ$．可知 A、B、C、D 四点共圆。所以

$$\angle BDE=\angle BDC-\angle EDC=\angle BAC-\angle BAF=\angle FAC.$$

例 8　如图 13－9，在 ΔABC 中，$AB=AC$，D 是 BC 边上任意一点，C_1 是 C 点关于直线 AD 的对称点，C_1B 与 AD 相交于点 P．试问：当点 D 在 BC（BC 中点除外）上运动时，$AD\cdot AP$ 的值有何变化？并予以证明．

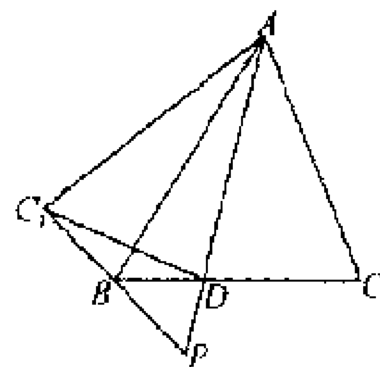


图 13－9

解　因 $AB=AC$，故$\angle ABC=\angle C$，又点 C_1 与点 C 关于 AD 对称，故$\angle ABD=\angle AC_1D$，可知 A、C_1、B、D 四点共圆．有$\angle PBC=\angle C_1AP$．因$\angle C_1AP=\angle CAP$，故$\angle PBC=\angle PAC$，C、A、B、P 四点共圆．于是$\angle APB=\angle ACB=\angle ABD$，可得 $\Delta ABD\backsim\Delta APB$，进而有$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AB}{AP}$，即 $AD\cdot AP=AB^2$（定值）．

例 9　在 ΔABC 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$，求证：$\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}=$

$\frac{1}{BC}$,

分析 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}$

$\Leftrightarrow AB\cdot BC+AC\cdot BC=AB\cdot AC.$ ①

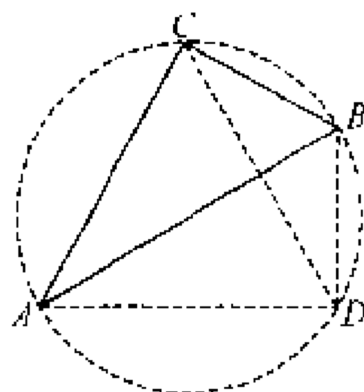


图 13－10

根据①的结构,联想到运用托勒密定理,故添置$\triangle ABC$的外接圆,并作弦 BD,使 $BD=BC$(如图 13－10),则$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$,又因$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$,故$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$,$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{ACB}$,有$\angle CAD=\angle CDA$,$AC=CD$.

根据托勒密定理,有

$$AC\cdot BD+BC\cdot AD=AB\cdot CD,$$

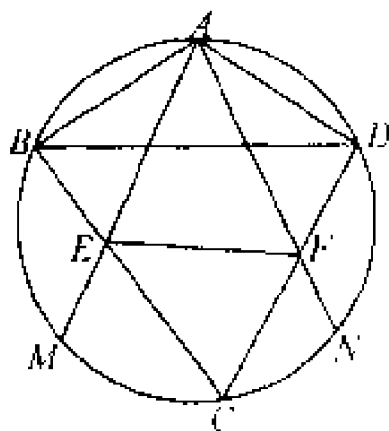
即

$$AB\cdot BC+AC\cdot BC=AB\cdot AC.$$

练 习 十 三

1.已知圆内接四边形 $ABCE$ 中,$AE=CE$,$AB=AC$,AE、BC 的延长线交于 D,求证:(1) $ED=EB$;(2) $CD^2=AE\cdot AD$.

2.如图,已知圆内接四边形 $ABCD$ 中 $AB=AD$,M 为$\overset{\frown}{BC}$的中点,N 是$\overset{\frown}{CD}$的中点,AM 交 BC 于 E,AN 交 CD 于 F,求证:$EF\parallel BD$.



(第 2 题)

3.已知圆内接四边形 $ABCD$ 中,$AE\perp BD$ 于 E,$DF\perp AC$ 于 F,求证:$EF\parallel BC$.

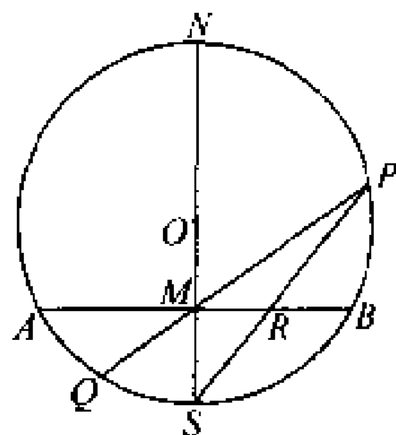
4.已知 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的 AC、CB 和 BA 各边中点,AP 是高,求证:四边形 $EFDP$ 有外接圆.

5.已知四边形 $ABCD$ 的两条对角线互相垂直于 O 点,OE、OF、OG 和 OH 分别是点 O 到 AB、BC、CD 和 DA 的距离,求证:四边形

$EFGH$内接于圆.

6. 已知四边形 $ABCD$ 中，$BC = DC$，AC 平分$\angle BAD$，若 $AB = a$，$AD = b$，问 a 与 b 的大小符合什么条件，这个四边形一定有外接圆？须说明理由.

7. 等边 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 BC、CA 边上的点，且 $BD = CE = \frac{1}{2}CD$. 连 BE、AD 交于点 P，证明：$CP \perp AD$.



（第 10 题）

8. 已知三角形 ABC 中，$\angle ABC < \angle ACB$，BD、CE 是角平分线，求证：$CE < BD$.

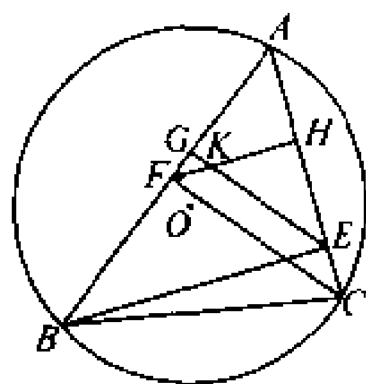
9. 已知等腰三角形 ABC，$AB = AC$，AD 垂直于 BC 于 D 点，DE 垂直于 AC 于 E 点，F 是 DE 的中点，求证：$AF \perp BE$.

10. 如图，NS 是$\odot O$ 的直径，弦 $AB \perp NS$，且交 NS 于 M，P 为 $\overset{\frown}{ANB}$上异于 N 的一点，PS 交 AB 于 R，PM 的延长线交$\odot O$ 于 Q，求证：$RS > MQ$.

11. 如图，已知 O 是锐角三角形 ABC 的外接圆圆心，BE、CF 为 AC、AB 边上的高，自垂足 E、F 分别作 AB、AC 的垂线，垂足为 G、H，EG、FH 相交于 K.

(1)试证明：A、K、O 三点共线.

(2)若 $AK = KO$，求$\angle A$.



（第 11 题）

12. $\triangle ABC$ 中，M 为 AC 中点，$BH \perp AC$，垂足 H，AP、CQ 分别垂直$\angle B$ 的平分线，垂足 P、Q. 求证：H、M、P、Q 四点共圆.

第十四讲　圆的切线、圆的外切多边形

知识点和方法述要

1. 直线与圆有三种位置关系，设圆的半径为 r_2，圆心 O 到直线 ℓ 的距离为 d，则

直线 ℓ 与 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$；

直线 ℓ 与 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$；

直线 ℓ 与 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$.

2. 圆的切线的判定定理　经过半径的外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

圆的切线的性质定理　圆的切线垂直于经过切点的半径.

3. 切线长定理　从圆外一点引圆的两条切线，它们的切线长相等，圆心和这点的连线平分两条切线的夹角.

4. 顶点在圆上，一边和圆相交、另一边和圆相切的角叫做弦切角.

(1) 弦切角等于它所夹的弧所对的圆周角.

(2) 如果两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角相等.

5.(1) 和三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆，内切圆的圆心叫做三角形的内心，这个三角形叫做圆的外切三角形.

和多边形的各边都相切的圆叫做多边形的内切圆，这个多边形叫做圆的外切多边形.

(2) 三角形的内心为三角形平分线交点，到各边距离等于内切圆半径.

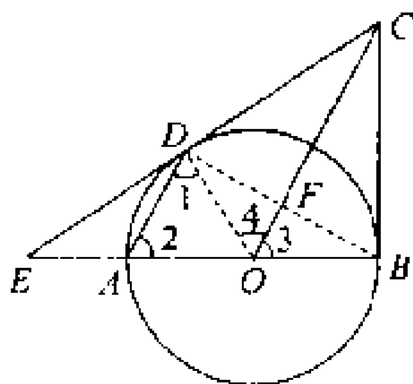
(3) 圆的外切四边形的两组对边的和相等.

例 题 精 讲

例1 如图14－1，AB是$\odot O$的直径，BC是切线，B是切点，弦AD平行OC.

(1) 求证：DC是$\odot O$的切线；

(2) 若$\odot O$的半径为R，CD与BA的延长线交于E，$BC=AB$，求AE的长.



14－1

解 (1) 如图14－1，圆$AD /\!/ OC$，故$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$. 又$OA=OD$，可得$\angle 1=\angle 2$，因此$\angle 3=\angle 4$. 注意到$OB=OD$，OC公共，所以$\triangle OBC\cong\triangle ODC$. 于是$\angle ODC=\angle OBC=90°$，即$OD\perp CD$. CD是$\odot O$的切线.

(2) 因$BC=AB=2R$，故

$$OC=\sqrt{OB^2+BC^2}=\sqrt{R^2+(2R)^2}=\sqrt{5}R.$$

连结BD，交OC于F，则$BD\perp OC$，有$OB^2=OF\cdot OC$，可得

$$OF=\frac{OB^2}{OC}=\frac{R^2}{\sqrt{5}R}=\frac{\sqrt{5}}{5}R.$$

进而可知$AD=2OF=\frac{2\sqrt{5}}{5}R$. 因$\frac{AD}{OC}=\frac{AE}{EO}$，所以

$$\frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}R}{\sqrt{5}R}=\frac{AE}{AE+R},$$

解得$AE=\frac{2}{3}R$.

例2 如图14－2，D是$\triangle ABC$的边AC上一点，$AD:DC=2:1$，$\angle C=45°$，$\angle ADB=60°$. 求证：BC是$\triangle BCD$的外接圆O的切线.

分析 连结OB，欲证AB是$\odot O$的切线，只需证$OB\perp AB$.

延长BO交$\odot O$于E，连结OC，OE，CE，OD. 注意到由$\angle ACB=$

45°,可知$\angle BOD=90°$,即$OD\perp BE$,于是只需证$OD /\!/ AB$.依题设$AD:DC=2:1$,这启发我们转而尝试证明$BF:FC=2:1$.因四边形$BECD$内接于$\odot O$,$\angle CEB=\angle ADB=60°$,可知$\angle CBE=30°$,有$OF=\frac{1}{2}BF$.所以剩下的只是需要证明$OF=FC$,这一点不难办到!事实上,$\angle BOC=2\angle BEC=120°$,可得$\angle FOC=120°-90°=30°$,而$OB=OC$,有$\angle BCO=\angle OBC=30°$.所以$\angle FOC=\angle FCO$,即$OF=FC$.

14-2

例3 如图14-3,PA、PB分别切$\odot O$于A、B两点,PC满足

$$AB\cdot PB-AC\cdot PC=AB\cdot PC-AC\cdot PB,$$

且$AP\perp PC$,$\angle PAB=2\angle BPC$,求$\angle ACB$.

14-3

解 依题意,有

$$(AB+AC)(PB-PC)=0,$$

即 $$PB=PC.$$

又PA、PB是圆O的切线,有$PA=PB$.于是

$$PA=PB=PC,$$

从而推知A、B、C三点在以P为圆心、PA为半径的圆上.

在圆P中,设$\angle ACB=\alpha$,则$\angle APB=2\alpha$,$\angle BPC=90°-2\alpha$.

因 $$\angle PAB=2\angle BPC=180°-4\alpha,$$

$$\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}(180°-\angle APB)=90°-\alpha,$$

所以 $$180°-4\alpha=90°-\alpha,$$

得$\alpha=30°$.故$\angle ACB=30°$.

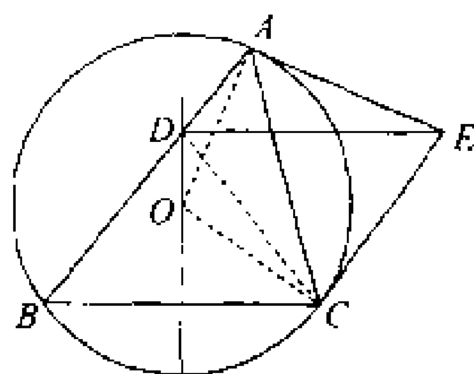
例4 已知BE、CF为$\triangle ABC$的两条高,O为其外接圆圆心.求证:$AO\perp EF$.

14-4

分析 如图14-4,过A作$\odot O$的切线AT,

则有 $TA\perp OA$. 欲证 $AO\perp EF$，只需证 $EF\parallel TA$. 因 BE、CF 为$\triangle ABC$ 的高，可知$\angle BEC=\angle BFC=90^\circ$，$B$、$C$、$E$、$F$ 四点共圆，于是$\angle ABC=\angle AEF$. 又$\angle TAC=\angle ABC$，故$\angle AEF=\angle TAC$，可知 $EF\parallel TA$.

例 5 已知$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，过 A、C 的切线交于点 E，BC 的中垂线交 AB 于 D，求证：$DE\parallel BC$.



14－5

分析 如图 14－5.

$DE\parallel BC$

$\Uparrow$ $BC\perp OD$

$DE\perp OD$

$\Uparrow$ AE 为$\odot O$ 的切线

$OA\perp AE$

O、D、A、E 四点共圆

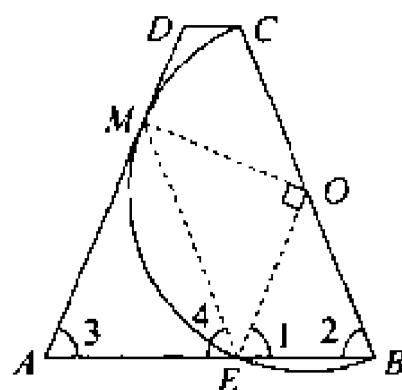
$\Uparrow$

O,D,A,C 四点共圆，O,C,E,A 四点共圆

$\Uparrow$ $\Uparrow$

$\angle ADC=2\angle B=\angle AOC$，$\angle OAE+\angle OCE=180^\circ$.

例 6 以一底角为 67.5°的等腰梯形 $ABCD$ 的一腰 BC 为直径作圆，交大底 AB 于 E，且恰与另一腰 AD 相切于 M，求 $BE:AE$.



14－6

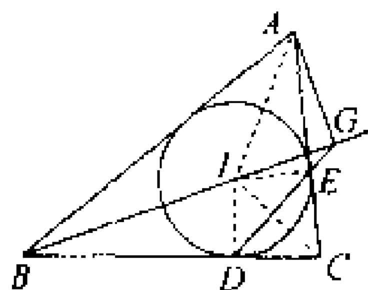
解 如图 14－6，连结 OM、OE、ME，则$\angle 1=\angle 2=\angle 3=67.5^\circ$，可知 $OE\parallel AD$. 因 AD 与$\odot O$ 相切于 M，故 $OM\perp AD$. 因此，$OE\perp OM$，$\triangle OME$ 为等腰直角三角形，$\angle MEO=45^\circ$，

$\angle 4=180^\circ-(\angle MEO+\angle 1)=180^\circ-(45^\circ+67.5^\circ)=67.5^\circ$.

于是，有$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，$\triangle AME\backsim\triangle BOE$，所以

$$\frac{BE}{AE}=\frac{OE}{ME}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 7 如图 14－7，$\triangle ABC$ 的内心 I，内切圆分别切 BC、CA 于点 D、E. 如果 BI 交 DE 于 G，求证：$AG\perp BG$.



14－7

证明 连结 AI、ID、IC、IE，因 I 为 $\triangle ABC$ 内心，有

$$\begin{aligned}\angle AIB&=180^\circ-(\angle IAB+\angle IBA)\\&=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)\\&=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle ACB)\\&=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB.\end{aligned}\qquad ①$$

因 $ID\perp BC$，$IE\perp AE$，故 $\angle IDC=\angle IEC=90^\circ$，$D$、$E$ 在以 IC 为直径的圆上，$\angle IDE=\angle ICE=\frac{1}{2}\angle ACB$. 于是

$$\angle BDE=\angle BDI+\angle IDE=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB.\qquad ②$$

由①，②得 $\angle AIB=\angle BDG$. 又 $\angle ABI=\angle CBI$，所以 $\triangle ABI\backsim\triangle BGD$，有

$$\frac{AB}{BI}=\frac{BG}{BD},$$

从而可得 $\triangle ABG\backsim\triangle IBD$. 因 $\angle BDI=90^\circ$，故 $\angle AGB=90^\circ$，即 $AG\perp BG$.

例 8 在 $\triangle ABC$ 中，CH 为高，R、S 分别是 $\triangle ACH$ 和 $\triangle BCH$ 的内切圆与 CH 的切点. 若 $AB=1998$，$AC=1997$，$BC=1996$，试求 RS 的长.

解 如图 14－8，设 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 分别为 a，b，c，$CH=h$，$AH=x$，$BH=y$，两内切半径分别为 r_1，r_2，于是

$$RS=|RH-SH|=|r_1-r_2|.\qquad ①$$

因　　$b = AC = AP + PC = AT + RC = (x - r_1) + (h - r_1)$，

故　　$$r_1 = \frac{1}{2}(x + h - b).\qquad ②$$

同理　　$$r_2 = \frac{1}{2}(y + h - a).\qquad ③$$

14－8

由①，②，③得

$$RS = |r_1 - r_2| = \left|\frac{1}{2}(x + h - b) - \frac{1}{2}(y + h - a)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|(x - y) + (a - b)|.\qquad ④$$

因 $CH \perp AB$，有

$$a^2 - y^2 = h^2 = b^2 - x^2,$$

进而，得　　$$x^2 - y^2 = b^2 - a^2,$$

有　　$$x - y = \frac{b^2 - a^2}{x + y} = \frac{b^2 - a^2}{c}.\qquad ⑤$$

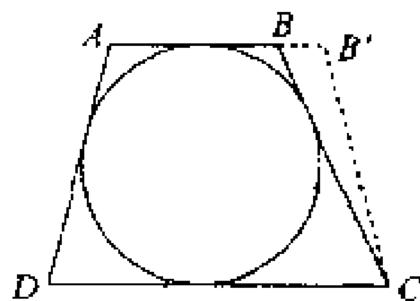
⑤代入④得

$$RS = \frac{1}{2}\left|\frac{b^2 - a^2}{c} + (a - b)\right| = \frac{1}{2c}\cdot|a - b|\cdot|a + b - c|$$

$$= \frac{1}{2 \times 1998} \times |1997 - 1996|\cdot|1996 + 1997 - 1998|$$

$$= \frac{665}{1332}.$$

例 9　已知四边形 $ABCD$ 中，$AB + CD = AD + BC$. 求证：四边形 $ABCD$ 是圆的外切四边形.



14－9

分析　先作⊙O 与 AB、AD、DC 三边相切（如图 14－9）.

假若 BC 不与⊙O 相切，则过 C 作 CB' 与⊙O 相切，交 AB 于 B'，四边形 $ADCB'$ 为⊙O 的外切四边形，有

$$AB' + DC = AD + B'C,$$

因 $AB+DC=AD+BC$,

故 $AB'-AB=B'C-BC$,

可得 $|AB'-AB|=|B'C-BC|$.

即 $|BB'|=|B'C-BC|$.

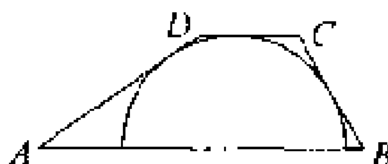
这表明$\triangle BB'C$中两边之差等于第三边,导致矛盾.因此,BC与$\odot O$相切,四边形$ABCD$是圆外切四边形.

练 习 十 四

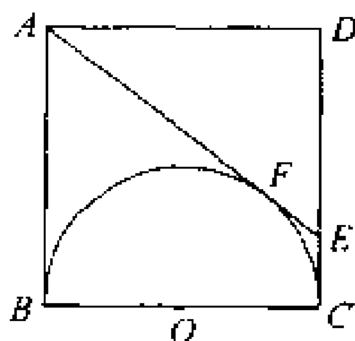
一、填空题

1. 面积为$169\sqrt{2}\text{cm}^2$的等腰梯形外切于直径为13cm的圆,则梯形中较小的底角的度数是__________.

2. 如图,半圆O的直径在梯形$ABCD$的底边AB上,且与其余三边AD、DC、CB相切,若$BC=2$,$DA=3$,则AB的长等于__________.



(第2题)



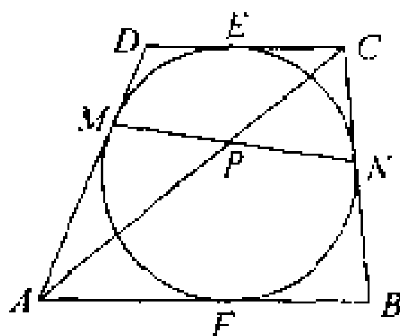
(第3题)

3. 如图,正方形$ABCD$中,BC为半圆O的直径,AE切$\odot O$于F,交CD于E,则$DE:AE=$__________.

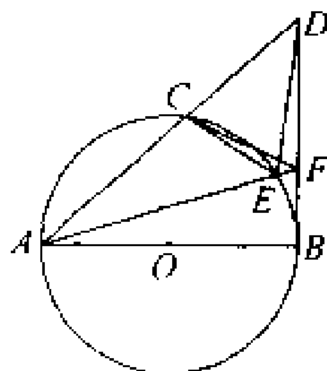
4. 如图,四边形$ABCD$外切于$\odot O$,M、N、E、F分别是切点,$AF=5$,$CE=3$,AC交MN于P,则$AP:PC=$__________.

二、解答题

5. 如图,AB是$\odot O$的直径,DB切$\odot O$于B,F为BD上一点,DA、FA分别交$\odot O$于C,E.求证:$\angle ECF=\angle EDF$.

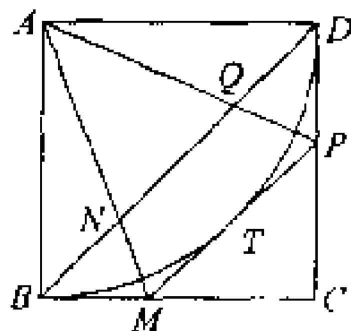


（第 4 题）



（第 5 题）

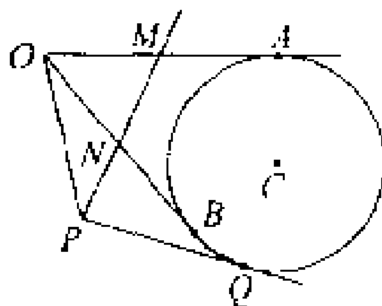
6. 如图，设 M、P 分别在正方形 $ABCD$ 的边 BC、CD 上，PM 与以 AB 为半径的圆相切于 T，线段 PA 与 MA 分别交对角线 BD 于 Q、N. 证明：五边形 $PQNMC$ 内接于圆.



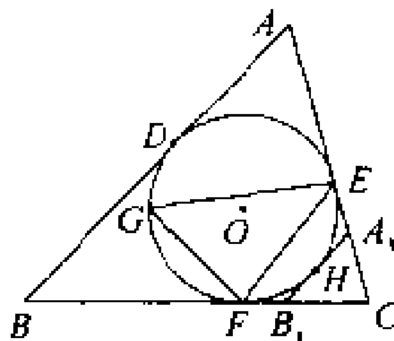
（第 6 题）

7. 设△ABC 为锐角三角形，过 A、B、C 三点分别作△ABC 外接圆的切线，过 A 点和过 C 点的切线分别与过 B 点的切线相交于 M 点和 N 点. 作△ABC 的高 BP，P 为垂足. 求证：直线 BP 平分∠MPN.

8. 如图，OA、OB 为⊙C 的切线，A、B 为切点，M、N 分别是 OA、OB 中点，P 为直线 MN 上一点，PQ 切⊙C 于 Q，求证：$PQ = PO$.



（第 8 题）



（第 9 题）

9. 如图，⊙O 是△ABC 内切圆，切点分别为 D、E、F. A_1B_1 切⊙O 于 H，分别交 AC、BC 于 A_1、B_1，△A_1B_1C 的周长为 8，G 是 $\overset{\frown}{EDF}$ 上任意一点，$\tan\angle EGF = \dfrac{4}{3}$，求⊙$O$ 的半径.

10. 菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别切于 E、F、G、H，在 $\overset{\frown}{EF}$

与$\overset{\frown}{GH}$上分别作$\odot O$的切线交AB于M,交BC于N,交CD于P、交DA于Q.求证:$MQ /\!/ NP$.

11. J和K沿着相距200米的两条笔直大道同向行走,K的速度为每秒3米,J的速度为每秒1米,在距两条路等距离的某处有一座高大的直径为100米的圆形建筑,当首次J和K的视线被此建筑挡住时,他们之间相距200米,令t秒后J和K再次能看见,如果把t写成最简分数,那么分子与分母的和为多少?

12. 已知直线m过$\odot O$的圆心,直线$\ell \perp m$,M是垂足,过ℓ上两点A,B作$\odot O$的切线AC、BD,C、D是切点.求证:

(1)若A、B在点M的同侧,且$AM > BM$,$AC - BD = AB$时,ℓ与$\odot O$相切;

(2)若A、B在点M的两侧,且$AC + BD = AB$时,ℓ与$\odot O$相切.

第十五讲 圆和圆

知识点和方法述要

1. 设大圆半径为 R,小圆半径为 r,两圆的圆心距为 d,则

$d>R+r \Leftrightarrow$ 两圆外离;

$d=R+r \Leftrightarrow$ 两圆外切;

$R-r<d<R+r \Leftrightarrow$ 两圆相交;

$d=R-r \Leftrightarrow$ 两圆内切;

$d<R-r \Leftrightarrow$ 两圆内含.

2. 如果两圆相切,那么切点在连心线上;如果两圆相交,则连心线垂直平分两圆的公共弦.

3. 如果两圆外离或外切,则存在两条外公切线,两条外公切线长相等;如果两圆外离,有两条内公切线,两条内公切线长相等.如果两圆外(内)切,则存在一条内(外)公切线.

例题精讲

例 1 如图 15-1,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A、B,$\odot O_1$ 的弦 BC 交 $\odot O_2$ 于 E,$\odot O_2$ 的弦 BD 交 $\odot O_1$ 于 F.求证:

(1)若 $\angle DBA=\angle CBA$,则 $DF=CE$;

(2)若 $DF=CE$,则 $\angle DBA=\angle CBA$.

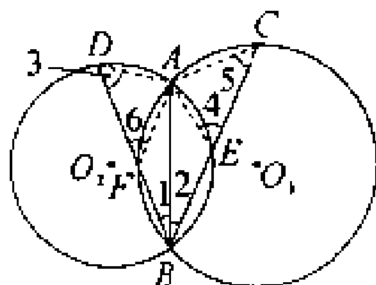


图 15-1

证明 (1)连结 AC、AD、AE、AF,则 $\angle 3=\angle 4$,$\angle 5=\angle 6$,又由 $\angle 1=\angle 2$ 知 $DA=AE$,故 $\triangle ADF \cong \triangle AEC$,可得 $DF=CE$.

(2)同上,$\angle 3=\angle 4$,$\angle 5=\angle 6$,又 $DF=CE$,

故$\triangle ADF \cong \triangle AEC$，有$AD = AE$．于是$\angle 1 = \angle 2$，即$\angle DBA = \angle CBA$．

例2 如图15－2，$\odot O_1$与$\odot O$相交于C、D，且过点O，P为$\odot O_1$上一点，PA、PB为$\odot O$的切线，切点A，B．求证CD平分AB．

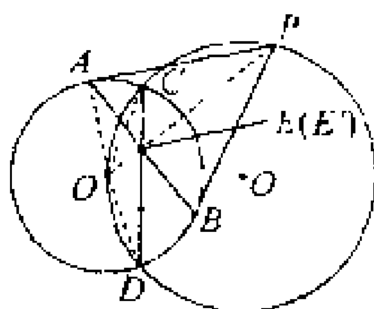


图15－2

证明 连结OA、OC、OD、OP、PC，设OP交AB于E，交CD于E'．

因PA、PB与$\odot O$相切于A、B，故$OA \perp PA$，$OP \perp AB$，垂足为E，有

$$OA^2 = OE \cdot OP. \qquad ①$$

又$\angle OPC = \angle OCE' = \angle ODC$，$\angle COE' = \angle COP$，可知$\triangle OCE' \backsim \triangle OPC$，有

$$\frac{OC}{OP} = \frac{OE'}{OC},$$

即
$$OC^2 = OE' \cdot OP. \qquad ②$$

因$OA = OC$，故由①、②可知$OE = OE'$，即E与E'重合，从而得$AE' = E'B$，即CD平分AB．

例3 如图15－3，$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A、B，直线MN垂直AB于A，且分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$交于M、N，P为线段MN的中点，$\angle AO_1Q_1 = \angle AO_2Q_2$．求证：$PQ_1 = PQ_2$．

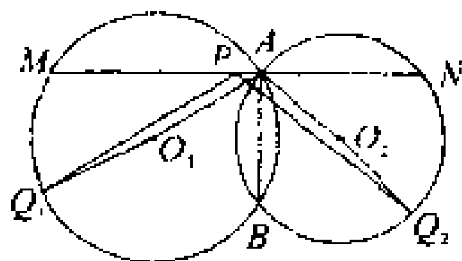


图15－3

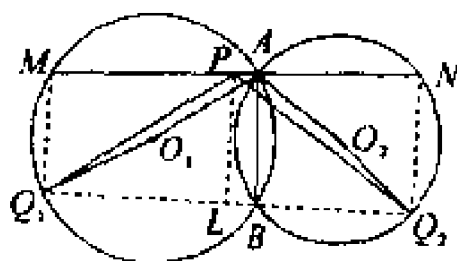


图15－4

证一 如图15－4，连结BQ_1、BQ_2、MQ_1、MQ_2，

因$\angle ABQ_1 = \frac{1}{2}\angle AO_1Q_1$，

$$\angle ABQ_2 = 180^\circ - \angle ANQ_2 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_2Q_2,$$

且$\angle AO_2Q_1 = \angle AO_2Q_2$，故$\angle ABQ_1 + \angle ABQ_2 = 180^\circ$，即 Q_1、B、Q_2 三点共线.

注意到 $MN \perp AB$，有 $\angle MAB = \angle NAB = 90^\circ$，故 $\angle MQ_1B = \angle NQ_2B = 90^\circ$，四边形 Q_1Q_2NM 为直角梯形. 设 PL 为梯形 Q_1Q_2NM 的中位线，则 PL 又是 Q_1Q_2 的垂直平分线，于是 $PQ_1 = PQ_2$.

证二 如图 15－5，设 AM、AN 的中点分别为 C、D，连结 O_1C、O_2D，则 $O_1C \perp MN$，$O_2D \perp MN$. 又 $AB \perp MN$，故 $O_1C /\!/ O_2D /\!/ AB$. 注意到 $O_1O_2 \perp AB$，于是 $O_1O_2 /\!/ CD$，四边形 O_1CDO_2 为矩形，$O_1C = O_2D$. 又由

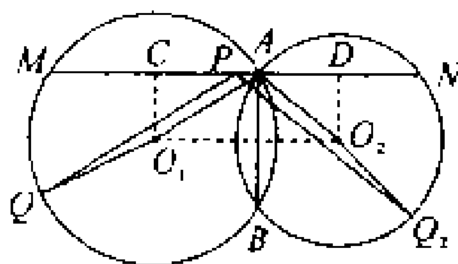


图 15－5

$$PC = PM - CM = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}MA = \frac{1}{2}AN = AD,$$

可知 $\mathrm{Rt}\triangle O_1CP \cong \mathrm{Rt}\triangle O_2DA$，$O_1P = O_2A$，四边形 PO_1O_2A 为等腰梯形，有 $\angle AO_1P = \angle AO_2P$. 因 $\angle AO_1Q_1 = \angle AO_2Q_2$，故 $\angle PO_1Q_1 = \angle Q_2O_2P$，又 $O_1Q_1 = O_1A = O_2P$，$O_1P = O_2A = D_2Q_2$，所以$\triangle PO_1Q_1 \cong \triangle Q_2O_2P$，可得 $PQ_1 = PQ_2$.

例 4 从以 AB 为直径的半圆上一点 P 引 $PC \perp AB$ 于 C. 以 AC 为直径的圆和 PA 交于 D 点，以 BC 为直径的圆和 PB 交于 E 点. 求证：DE 是这两圆的公切线.

分析 根据对称性，若能证明 DE 与$\overset{\frown}{ADC}$相切，同理可知 DE 与$\overset{\frown}{CEB}$相切.

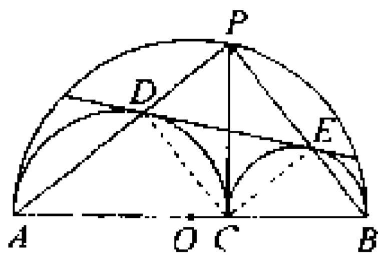


图 15－6

如图 15－6，连结 CD、CE，欲证 DE 与$\overset{\frown}{ADC}$相切，只须证$\angle EDC = \angle A$. 注意到$\angle CDP = \angle CEP = 90^\circ$，可在 C、D、P、E 四点共圆，有$\angle CDE = \angle CPE$，而 $PC \perp AB$，$\angle APB = 90^\circ$，又有$\angle PAB = \angle CPB$，所以$\angle CDE = \angle A$.

例 5 两圆内切于 P 点，大圆 O 的弦 AB 切小圆 O' 于 C 点，PC 交大圆于 D，求证：$PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

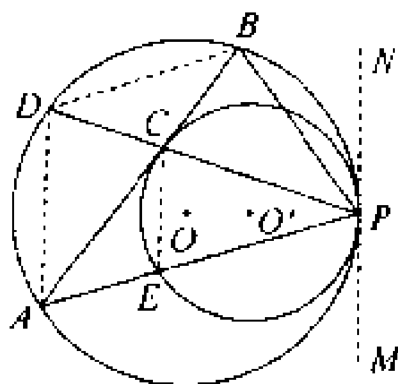


图 15－7

证明 如图 15－7，过 P 点作两圆公切线 MN，连结 AD、BD、CE，则 $\angle BDP=\angle PAB$. 因 AB 切 $\odot O'$ 于 C，故 $\angle ACE=\angle APC$. 又 $\angle NPC=\angle PEC$，$\angle NPD=\angle PAD$. 有 $\angle PEC=\angle PAD$，$AD /\!/ EC$，于是 $\angle ACE=\angle DAB=\angle DPB$，可得 $\angle APC=\angle DPB$. 因此，$\triangle PAC\backsim\triangle PDB$，有 $\dfrac{PA}{PD}=\dfrac{PC}{PB}$，

即 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

例 6 分别以 A、B 为圆心的两圆在一个已知角 α 内，这两圆相切且与角 α 的两边相切. 证明：以 AB 为直径的圆与角 α 的两边相切.

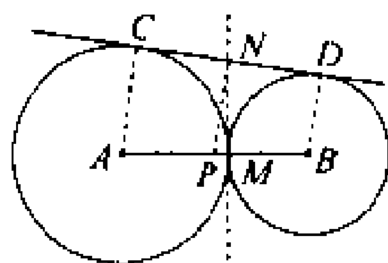


图 15－8

证明 如图 15－8，显然两圆外切，设切点为 M. 过 M 作两圆的内公切线与 $\angle\alpha$ 的一边交于 N. 设 C、D 是 $\angle\alpha$ 的一边与 $\odot A$、$\odot B$ 的切点，P 是 AB 中点，连 PN. 由 $CN=PM=ND$，知 N 是 CD 中点. 又 $AC\perp CD$，$BD\perp CD$，有 $AC /\!/ BD$，故 PN 是梯形 $ABDC$ 的中位线，$PN /\!/ AC /\!/ BD$，从而有 $PN\perp CD$，且

$$NP=\frac{1}{2}(AC+BD)=\frac{1}{2}AB.$$

故点 N 在以 AB 为直径的圆上且 CD 与该圆相切，即知 $\angle\alpha$ 两边与该圆相切.

例 7 已知点 B 在线段 AC 上，分别以 AB、BC、AC 为直径作 $\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O$. 过点 B 作直线交 $\odot O$ 于 P、Q，交 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 于 R、S. 求证：$PR=QS$.

证明 如图 15－9，连结 O_1R，O_2S，OR，OS. 因

$\angle O_1RB=\angle OBR=\angle O_2BS=\angle O_2SB$,

故 $O_1R // O_2S$，$\angle OO_1R=\angle OO_2S$.

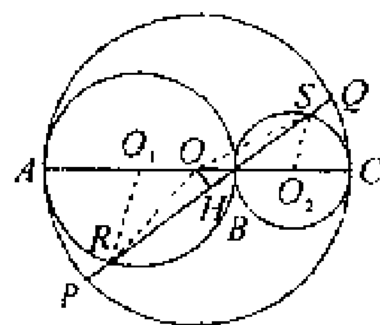


图 15－9

设$\odot O$、$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r,r_1,r_2，则 $2r=2r_1+2r_2$，有 $r=r_1+r_2$. 于是 $O_1R=r-r_2=OO_2$，

$OO_1=AO-AO_1=r-r_1=r_2=O_2S$，

故$\triangle RO_1O\cong\triangle OO_2S$，有 $OR=OS$，$\triangle ORS$ 为等腰三角形. 作 $OH\perp PQ$，则 H 为 RS 的中点，即 $RH=HS$. 又 $HP=HQ$，故 $PR=SQ$.

例 8　如图 15－10，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 相交于 M、N 两点. O_1M 交$\odot O_2$ 于 A_1，交$\odot O_1$ 于 A_2；O_2M 交$\odot O_2$ 于 B_1，交$\odot O_1$ 于 B_2. 求证：直线 A_1B_1、A_2B_2、MN 相交于一点.

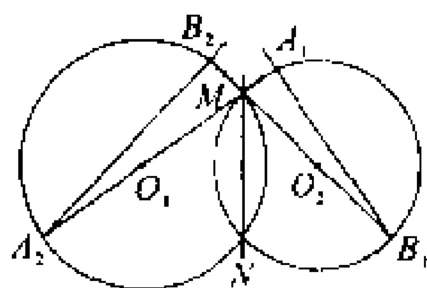


图 15－10

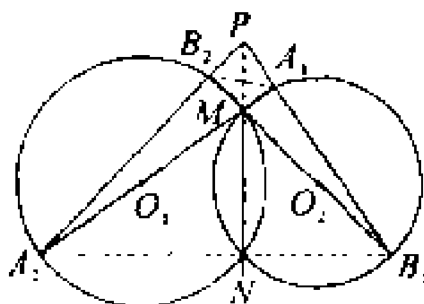


图 15－11

分析　如图 15－11，设直线 A_1B_1、A_2B_2 交于点 P，欲证 MN 过 P 点，可转而证明 P、M、N 三点共线.

连结 PM、A_1B_2、A_2N、B_1N，则

$\angle MNA_2+\angle MNB_1=\angle A_2B_2M+\angle MA_1B_1=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，

这表明 A_2、N、B_1 三点共线.

因$\angle PB_2M=\angle PA_1M=90^\circ$，故 P、B_2、M、A_1 四点共圆，有$\angle PB_2A_1=\angle PMA_1$. 又由$\angle A_2B_2B_1=\angle A_2A_1B_1=90^\circ$. 知 A_1、B_2、A_2、B_1 四点共圆，有$\angle PB_2A_1=\angle A_1B_1N$. 所以$\angle PMA_1=\angle A_1B_1N$. 因$\angle A_1MN+\angle A_1B_1N=180^\circ$，故$\angle PMA_1+\angle A_1MN=180^\circ$，即 P、M、N 三点共线.

例 9 如图 15－12，$\angle CAB=\angle ABD=90°$，$AB=AC+BD$，$AD$ 交 BC 于 P，作$\odot P$ 使其与 AB 相切. 试问：以 AB 为直径作出的$\odot O$ 与$\odot P$ 是相交？是内切？还是内含？请作出判断并加以证明.

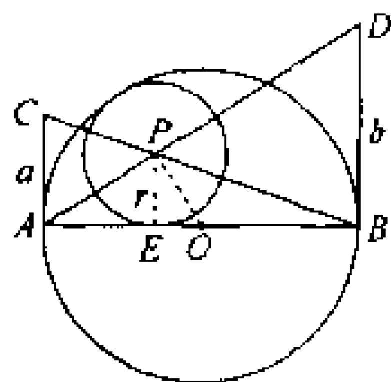


图 15－12

分析 寻求 OP 与两圆半径间的数量关系. 设$\odot P$ 切 AB 于 E，连 PE，则 $PE\perp AB$. 令 $AC=a$，$BD=b(a\leqslant b)$，则 $AB=a+b$. 又设$\odot O$ 半径为 R，$\odot P$ 半径为 r，由 $AB=AC+BD$ 可知 $R=\frac{1}{2}(a+b)$，又

$$\frac{r}{a}+\frac{r}{b}=\frac{EB}{AB}+\frac{AE}{AB}=1,$$

故 $r=\frac{ab}{a+b}$. 又由 $\frac{AE}{r}=\frac{AB}{b}$ 可知

$$AE=r\cdot\frac{AB}{b}=\frac{ab}{a+b}\cdot\frac{a+b}{b}=a.$$

于是 $$OE=\frac{1}{2}(a+b)-a=\frac{1}{2}(b-a).$$

在 Rt△OPE 中，

$$OP^2=r^2+OE^2=(\frac{a-b}{a+b})^2+\frac{1}{4}(a-b)^2=\frac{(a^2+b^2)^2}{4(a+b)^2},$$

故 $$OP^2=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}=\frac{(a+b)^2-2ab}{2(a+b)}=\frac{1}{2}(a+b)-\frac{ab}{a+b}=R-r.$$

由此可知$\odot O$ 与$\odot P$ 相内切.

练 习 十 五

一、填空题

1. 两圆外切，外公切线与连心线夹角为 45°，若圆心距为 8cm，则两圆的半径为___ ___ cm.

2. $\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，过 B 的直线分别交$\odot O_1$ 与

$\odot O_2$ 于 C、D，若 $\odot O_1$ 的半径长为 5，$\odot O_2$ 的半径长为 8，则 $\frac{AC}{AD}=$ ________.

3. 若 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别是 5cm，3cm，公共弦 MN 长 2cm，则两圆的公切线的长为________.

二、解答题

4. 试证明 Rt△ABC 的斜边的中点 D 为圆心，以 $AB+AC$ 为直径的圆和分别以 AB、AC 为直径的两圆相切.

5. 已知四边形 $ABCD$ 有一个外接圆，且有一个内切圆与 AB、BC、CD、DA 相切于 E、F、G、H. 求证：$EG\perp HF$.

6. 两圆相交于 A、B 两点，且一个圆经过另一个圆的圆心 O，$\odot O$ 的弦 BC 的延长线交另一个圆于 D. 求证：$AD=DC$.

7. 以 O 为圆心的两个同心圆中，大圆的内接四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC\perp BD$，它的 BC 边切小圆于 E. 求证：$OE=\frac{1}{2}AD$.

8. $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，O_1 在 $\odot O_2$ 的圆周上，$\odot O_1$ 的弦 AC 交 $\odot O_2$ 于 D，求证 $O_1D\perp BC$.

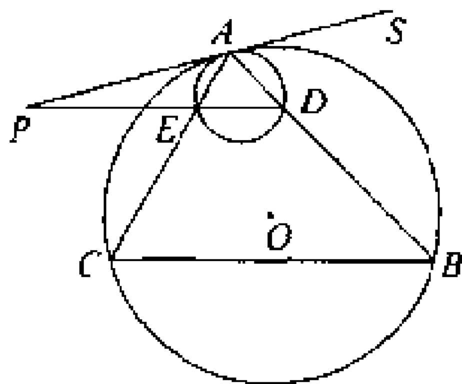
9. 三个圆两两相切于 A、B、C. 证明：若弦 AB、AC 的延长线与第三个圆的交点为 D、E，则第三个圆的圆心在直线 DE 上.

10. $\odot O$ 与 $\odot O_1$ 相交，过一个交点 A 引二割线 BAC 与 DAE 分别与连心线 $\odot O_1$ 所在直线交于 P 和 Q，并且 $\angle BPQ=\angle DQP$. 求证：$BC=DE$.

11. 如图，△ABC 内接于 $\odot O$，$\angle BAC=75°$，$\angle C=60°$，$BC=3+\sqrt{3}$，小圆内切 $\odot O$ 于 A，且与 AB、AC 边分别交于 D、E，过 A 作两圆公切线，交 DE 延长线于 P.

(1)求 AB、AC 的长；

(2)求 $AP:PD$ 的值.



(第 11 题)

12. 设不过▱$ABCD$ 顶点的一直线分别

交直线 AB、BC、CD、DA 于 E、F、G、H. 证明:$\odot EFC$ 与 $\odot GHC$ 的另一交点 Q 在一定直线上.

第十六讲　圆幂定理

知识点和方法述要

1. 相交弦定理　如果圆内两条弦 AB、CD 相交于点 P，那么 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2. 割线定理　如果从圆外一点 P 向圆引割线 PAB 和 PCD，那么 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

3. 切割线定理　如果从圆外一点 P 向圆引割线 PAB 和切线 PC，那么 $PA \cdot PB = PC^2$.

相交弦定理、割线定理、切割线定理统称为圆幂定理，它是处理有关圆中比例线段的问题极为重要的工具.

例题精讲

例 1　如图 16-1，弦 CF、DE 交于点 B，$PB // EF$，交 CD 的延长线于点 P，PA 与圆 O 相切于点 A. 求证：$PA = PB$.

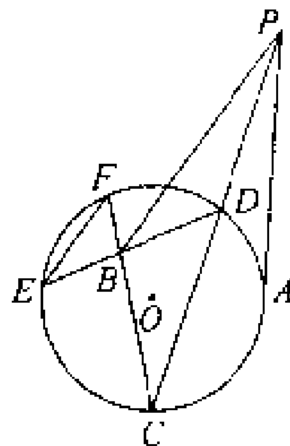


图 16-1

证明　因 PA 切⊙O 于 A，根据切割线定理，有

$$PA^2 = PD \cdot PC. \quad ①$$

又 $PB // EF$，故 $\angle PBD = \angle E = \angle C$. 进而可知 $\triangle PBD \backsim \triangle PCB$，有

$$\frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PB},$$

即

$$PB^2 = PC \cdot PD. \quad ②$$

由①，②可得 $PA = PB$.

例 2　如图 16-2，$\triangle ABC$ 的顶点 A 在圆周上，BC 切⊙O 于 M，AB、AC 分别与⊙O 相交于 D、E，且 M 为 $\overset{\frown}{DE}$ 的中点. 求证：$\frac{DB}{BM} =$

$\frac{EC}{CM}$.

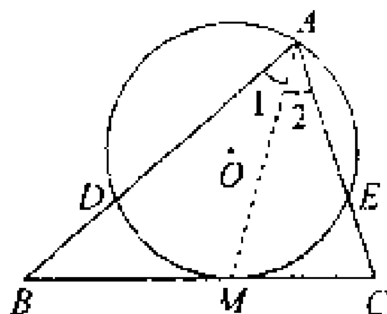


图 16－2

证明 因 $\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{ME}$，故$\angle 1=\angle 2$. 有

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BM}{CM}. \qquad ①$$

又 BC 切$\odot O$ 于 M，故 ②

$$MB^2=BD\cdot AB, \qquad ③$$

$$MC^2=CE\cdot AC. \qquad ④$$

由①，②，③得$\frac{DB}{BM}=\frac{EC}{CM}$.

例 3 如图 16－3，$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，过顶点 A 作$\odot O$ 的切线 AP 交 CB 的延长线于 P，$\angle APC$ 的平分线 PD 分别交 AB、AC 于 M、N 两点. 试求$\frac{CN\cdot BM}{AN^2}$的值.

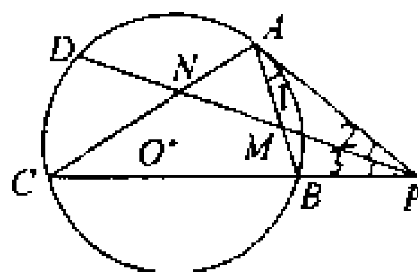


图 16－3

解 因$\angle AMN=\angle 1+\angle 2$，$\angle ANP=\angle C+\angle 3$，$\angle 2=\angle 3$，且 AP 切$\odot O$ 于 A，有 $\angle 1=\angle C$，故$\angle AMN=\angle ANM$，即 $AM=AN$. 因 PD 平分$\angle APC$，有

$$\frac{PB}{PA}=\frac{MB}{MA}, \qquad ①$$

$$\frac{PC}{PA}=\frac{CN}{NA}. \qquad ②$$

①，②相乘，得

$$\frac{PB\cdot PC}{PA^2}=\frac{MB\cdot CN}{MA\cdot NA},$$

又
$$PA^2=PB\cdot PC,$$

故
$$\frac{CN\cdot BM}{AN^2}=\frac{CN\cdot BM}{AM\cdot NA}=1.$$

例 4 如图 16－4，C 是以 AB 为直径的半圆 O 上一点，D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，过 D 作 AC 的垂线，垂足为 E，且交 AB 延长线于 F. 若 $ED=$

3，$DF=5$，求 AB 的长.

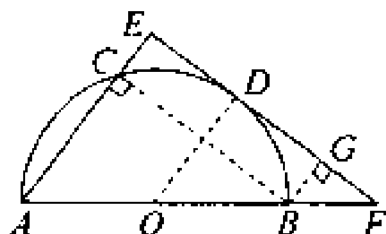


图 16－4

解 连结 OD、BC，因 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，有 $OD\perp BC$.

又 $BC\perp AC$，$EF\perp AC$，可知 $BC /\!/ EF$，所以 $OD\perp EF$，

EF 为⊙O 切线.

过 B 作 $BG\perp EF$，垂足为 G，则 $ED=DC=3$，$FG=2$. 设 $OB=x$，$FB=y$. 由 $BG /\!/ AE$，可得

$$\frac{FB}{FA}=\frac{FG}{EF},$$

即
$$\frac{y}{y+2x}=\frac{2}{5+3}=\frac{1}{4},$$

故
$$3y=2x. \quad ①$$

又
$$FD^2=FB\cdot FA,$$

即
$$25=y(y+2x). \quad ②$$

由①，②解得 $y=\frac{5}{2}$，$x=\frac{15}{4}$. 进而知 $AB=2x=\frac{15}{2}$.

例 5 如图 16－5，设△ABC 是直角三角形，点 D 在斜边 BC 上，$BD=4DC$. 一圆过点 C，且与 AC 相交于 F，与 AB 相切于 AB 的中点 G. 求证：$AD\perp BF$.

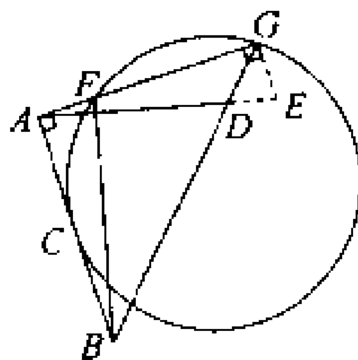


图 16－5

分析 尝试证明∠CAD＝∠ABF. 过 C 作 $CE\perp AC$，交 AD 的延长线于 E 点，则 $CE /\!/ AB$. 于是有

$$\frac{AB}{CE}=\frac{BD}{DC}.$$

又 $BD=4DC$，则有 $AB=4CE$.

因 $AB=2AG$，所以 $AG=2CE$. 由切割线定理得

$$AG^2=AF\cdot AC,$$

从而有 $$2AG\cdot\frac{AG}{2}=AF\cdot AC,$$

即 $$AB\cdot CE=AF\cdot AC.$$

因而可知 Rt△ABF∽Rt△CAE，得$\angle CAE=\angle ABF$，由此推知$\angle CAE+\angle AFB=90°$，即 $AD\perp BF$.

例 6 如图 16－6，⊙O_1 和⊙O_2 相交于 M、N，D 是 NM 延长线上一点，两圆连心线交⊙O_1 于 A、B，AD 交⊙O_1 于 C，DN 分别交 AB、BC 于 E、G. 求证：$EM^2=ED\cdot EG$.

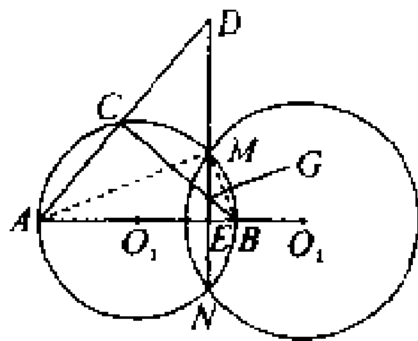


图 16－6

分析 首先尝试将欲证积式转化为两相交直线上的线段积式.

连结 AM、MB，因 AB 是⊙O_1 直径，故$\angle AMB=90°$. 又 O_1O_2 垂直平分 MN，故

$$EM^2=AE\cdot EB. \qquad ①$$

易见 Rt△AED∽Rt△GBE，有

$$\frac{DE}{BE}=\frac{AE}{GE},$$

即 $$ED\cdot EG=AE\cdot EB. \qquad ②$$

由①，②即得欲证等式.

例 7 如图 16－7，从半圆 O 上的一点 C 向直径 AB 引垂线，设垂足为 D，作⊙O' 切 $\overset{\frown}{BC}$，CD、DB 分别于 E、F、G. 求证：$AC=AG$.

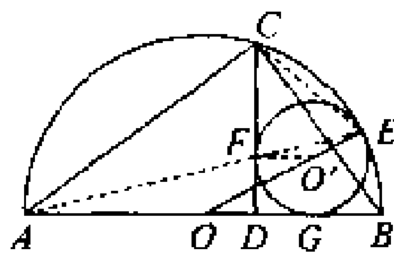


图 16－7

证明 依题意，O、O'、E 三点共线. 连 $O'F$，EF、AE、CE. 因 $CD\perp AB$，$O'F\perp AB$，故 $O'F\parallel AB$. 因

$$\angle FEO'=\frac{1}{2}\angle FO'O=\frac{1}{2}\angle EOB=\angle AEO,$$

可知 E、F、A 三点共线.

因$\angle ACD=\angle ABC=\angle AEC$，故 AC 是△CEF 外接圆

的切线，可得

$$AC^2 = AF \cdot AE. \qquad ①$$

又 AG 是$\odot O'$的切线，有

$$AG^2 = AF \cdot AE. \qquad ②$$

由①、②知 $AC = AG$.

例 8 如图 16－8，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 相交，公共弦为 MN，公切线为 AB 与 CD，直线 MN 交 AB 于 P，交 CD 于 Q. 求证：$PQ^2 = AB^2 + MN^2$.

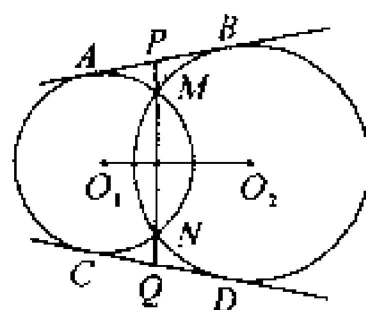


图 16－8

证明 设两圆外公切线交于 P 点，则 $PA = PC$，$PB = PD$，从而有 $AC /\!/ BD$. 由

$$PA^2 = PM \cdot PN = PB^2,$$

可得 $PA = PB$. 同理 $QC = QD$，故 $AC /\!/ PQ /\!/ BD$，且

$$AB^2 = 4PM \cdot PN,$$

O_1O_2 垂直平分线段 PQ，又 O_1O_2 垂直平分 MN，故 $PM = QN$. 于是

$$\begin{aligned} AB^2 + MN^2 &= 4PM \cdot PN + MN^2 \\ &= 4PM^2 + 4PM \cdot MN + MN^2 \\ &= (2PM + MN)^2 \\ &= (PM + MN + NQ)^2 \\ &= PQ^2. \end{aligned}$$

例 9 如图 16－9，圆内接四边形 $ABCD$ 中，延长 AB、DC 交于 E，延长 AD、BC 交于 F，EM、FN 为圆的切线，分别以 E、F 为圆心，EM、FN 为半径作弧，两弧交于 K. 求证 $EK \perp FK$.

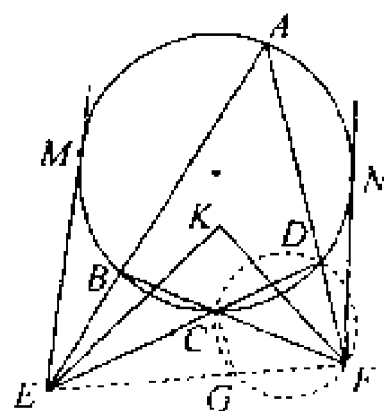


图 16－9

分析 连 EF. 则

$$\begin{aligned} & EK \perp FK \\ \Leftrightarrow & EK^2 + FK^2 = EF^2 \\ \Leftrightarrow & EM^2 + FN^2 = EF^2 \\ \Leftrightarrow & EC \cdot ED + FC \cdot FB = EF^2. \qquad ① \end{aligned}$$

过 C、D、F 作圆，交 EF 于 G，则$\angle EGC = \angle CDF = \angle ABC$，有

$$\angle EBC + \angle EGC = \angle EBC + \angle ABC = 180°,$$

所以 E、G、C、B 四点共圆. 于是

$$EC \cdot ED = EG \cdot EF, \quad ②$$

$$FC \cdot FB = FG \cdot EF. \quad ③$$

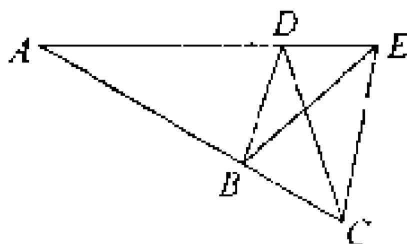
②,③相加即得①.

练 习 十 六

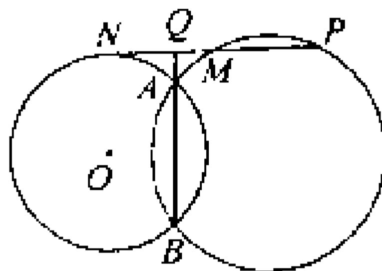
一、填空题

1. 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,AC、BD 交于 E,$BC = DC = 4$,$AE = 6$,且线段 BE、DE 的长都是正整数,则 BD 的长等于________.

2. 如图,$AB = 2\sqrt{3}$,$BC = \sqrt{3}$,$\angle DBE = \angle DCE = \angle A = 30°$,则 DE 的长是________.

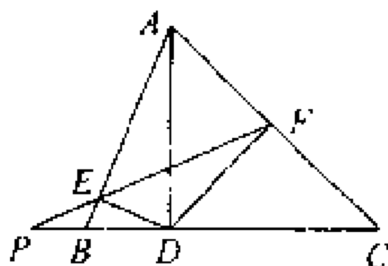


(第 2 题)



(第 3 题)

3 如图,过⊙O 外一点 P 作⊙O 的切线 PN,切点为 N. 令 PN 中点为 M,过 P 和 M 的圆与⊙O 交于 A、B,BA 的延长线与 PN 交于 Q,则 $PM : MQ$ 值是________.



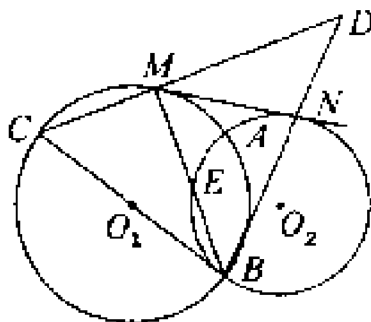
(第 4 题)

4. 如图,△ABC 中,$AD \perp BC$ 于 D,$DE \perp AB$ 于 E,$DF \perp AC$ 于 F,P 是 FE 的延长线与 CB 延长线的交点,若 $BD = 2$,$DC = 5$,则 PB 的长是________.

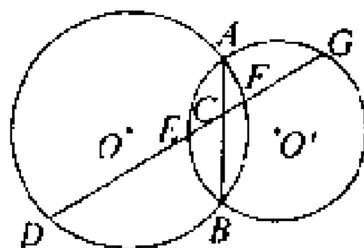
二、解答题

5. 已知 AB 是⊙O 的直径,点 C 在⊙O 上,⊙C 切 AB 于 D,与⊙O 相交于 E、F 两点,EF 交 CD 于点 G. 求证:$CG = DG$.

6. 如图,两圆 O_1、O_2 相交于 A、B 两点,圆 O_1 的弦 BC 切圆 O_2 于 B,MN 为公切线,M、N 为切点,BM 交圆 O_2 于 E,连结 CM、BN,并延长交于 D.证明:$MN^2 = ME \cdot MD$.



(第 6 题)



(第 7 题)

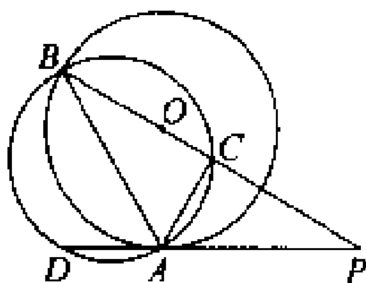
7. 如图,⊙O 和⊙O' 相交于点 A、B,C 为 AB 上任一点,过 C 作直线交⊙O 于 D、F,交⊙O' 于点 E、G.求证:$DE:EC = GF:FC$.

8. $\triangle ABC$ 是给定的锐角三角形.以 AB 为直径的圆与 AB 边的高线 CC' 及其延长线交于 M、N,以 AC 为直径的圆与 AC 边的高线 BB' 及其延长线交于 P、Q.求证:M、N、P、Q 四点共圆.

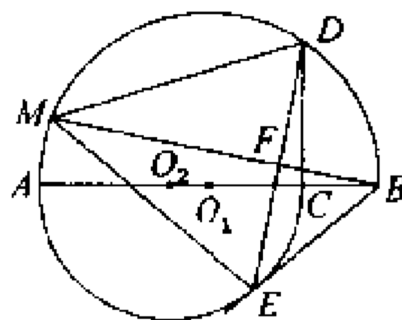
9. 如图,PA 为⊙O 的切线,PB 为过圆心的割线,$PA = AB$,以 AB 为直径的⊙O' 交 PB 于 C,交 PA 的延长线于 D.

(1)求证:$AC = AD$.

(2)若 $PA = 4\text{cm}$,求⊙O 的直径.



(第 9 题)

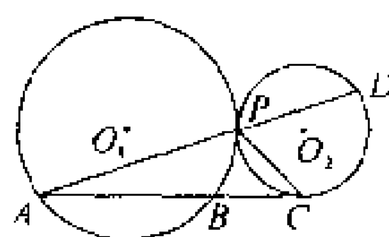


(第 10 题)

10. 如图,半⊙O_1 与半⊙O_2 连接于点 A,B、C 分别为两直径的另一端点,过 C、B 分别作⊙O_2 的切线 CD、BE,C、E 为切点,作 $BM \perp DE$ 于 F,且交⊙O_1 于 M.求证:$MD = ME$.

11. 如图,⊙O_1 与⊙O_2 外切于点 P,A 为⊙O_1 上一点,直线 AC

切$\odot O_2$于点 C，且交$\odot O_1$于点 B，AP 的延长线交$\odot O_2$于点 D.



(第 11 题)

(1)求证：$\angle BPC=\angle CPD$；

(2)若$\odot O_1$半径是$\odot O_2$半径的 2 倍，$PD=10$，$AB=7\sqrt{6}$，求 PC 的长.

12. A、B、C 为$\odot O$上的三等分点，作三个等圆$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$分别与$\odot O$内切于 A、B、C. P 为弧 AC 上任一点，过 P 作$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$的切线 PD、PE、PF，求证：$PE=PD+PF$.

第十七讲　三角形的四心

知识点和方法述要

1. 三角形除有外心、内心外还有重心和垂心.

(1)三角形三条中线相交于一点,各中线被该点分成 2:1 两部分.

如图 17-1,$\triangle ABC$ 中,设中线 BE、CF 相交于 G. 连结 EF,则 $EF \mathop{\parallel}\limits_{=} \frac{1}{2}BC$,可得 $BG:GE=CG:GF=2:1$. 同理可得中线 AD、BE 交点 G' 满足 $BG':G'E=2:1$,故 G、G' 重合,即 AD、BE、CF 交于点 G,且分各中线为 2:1 两部分.

三角形中线的交点称为该三角形的重心.

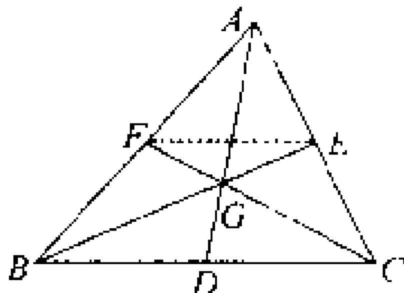


图 17-1

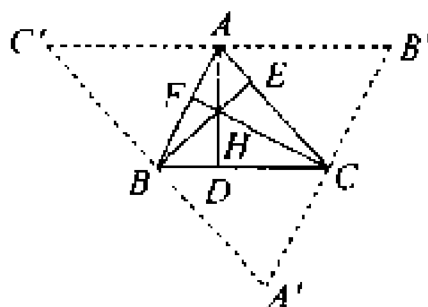


图 17-2

(2)三角形的三条高相交于一点.

如图 17-2,设 AD、BE、CF 为$\triangle ABC$ 的三条高. 过 A、B、C 分别作对边的平行线,交于 B'、C'、A',易见直线 AD、BE、CF 分别成为$B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的垂直平分线,因此它们相交于一点,即$\triangle A'B'C'$ 的外心.

三角形高的交点称为该三角形的垂心.

三角形三个顶点、三个垂足、垂心这 7 个点可以得到 6 个四点圆.

2. 任意一个三角形的垂心、重心和外心三点共线,且重心分垂

心和外心的连线段为 2:1.这条线称为欧拉线.

如图 17-3,设 O、H 分别为$\triangle ABC$ 的外心、垂心,过 B 作 $BD\perp AC$,过 A 作 $AE\perp BC$,BD 与 AE 交于 H 点,过 O 作 $OP\perp AC$,交直线 AC 于 P 点,连 C、O 并延长交$\triangle ABC$ 的外接圆 O 于 Q 点,连 BQ、AQ,因 CQ 是直径,所以$\angle QAC=90°$,从而有 $AQ\parallel OP$.又 O 为 QC 中点,则 $AQ=2OP$.

由于 $BD\perp AC$,$QA\perp AC$,那么 $AQ\parallel BD$.又$\angle QBC=90°$,$AE\perp BC$,所以 $BQ\parallel AE$.于是四边形 $AQBE$ 为平行四边形,从而有 $BH=AQ=2OP$.

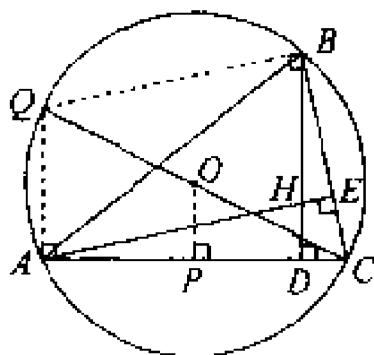


图 17-3

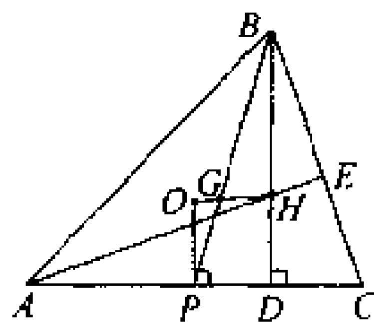


图 17-4

如图 17-4,令 OH 与 BP 的交点为 G,则由 $BD\parallel OP$ 得$\frac{BH}{OP}=\frac{BG}{GP}=\frac{GH}{OG}=2$,即 G 是分 BP 为 2:1 的点,而 P 为 AC 中点,所以 G 是$\triangle ABC$ 的重心.

例 题 精 讲

例 1 如图 17-5,在$\triangle ABC$ 中,$AB=10\text{cm}$,$AC=8\text{cm}$,$BC=6\text{cm}$,试求它的内心与外心之间的距离.

分析 依题设有

$$BC^2+AC^2=AB^2,$$

故$\triangle ABC$ 为以 C 为直角顶点的直角三角形.因此,$\triangle ABC$ 的外心为其斜边 AB 的中点,记作 M.

设$\triangle ABC$内切圆的圆心为I，与AB切于N，过IN，则$IN\perp AB$，且IN为内切圆半径，于是

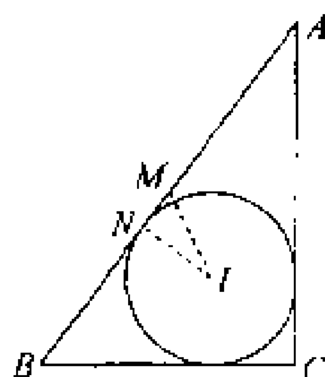


图 17-5

$$IN=\frac{1}{2}(AC+BC-AB)=\frac{1}{2}(6+8-10)=2(\mathrm{cm}),$$

$$NB=BC-IN=6-2=4(\mathrm{cm}),$$

进而，有 $MN=BM-BN=5-4=1(\mathrm{cm})$.

故 $IM=\sqrt{IN^2+MN^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}(\mathrm{cm})$.

即为$\triangle ABC$外心与内心的距离.

例 2 如图 17-6，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中，$CD\perp AB$于D，I是$\triangle ABC$的内心，I_1是$\triangle ACD$的内心，I_2是$\triangle BCD$的内心，求证：C为$\triangle II_1I_2$的垂心.

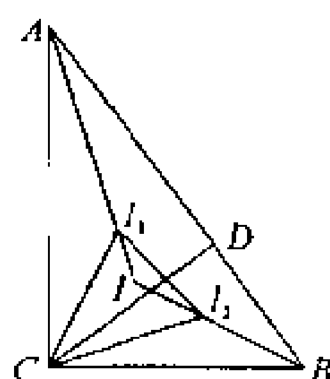


图 17-6

分析 C为$\triangle II_1I_2$的垂心

$\Uparrow$同理可证 $CI_1\perp II_2$

$CI_2\perp II_1$（$CI_1\perp AI$）

$\Uparrow$

$\angle CAI+\angle ACI_2=90^\circ$

$\angle BCD=\angle BAC$ $\|$

AI、CI_2分别平分 $\Uparrow$

$\angle BAC$、$\angle BCD$ $\angle BCI_2$

$\angle BCI_2+\angle ACI_2=90^\circ$

例 3 如图 17-7，设M是$\triangle ABC$内一点，且$\angle BMC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$. 又直线$AM$经过$\triangle BMC$外接圆的圆心$O$. 试证：点$M$是$\triangle ABC$内心.

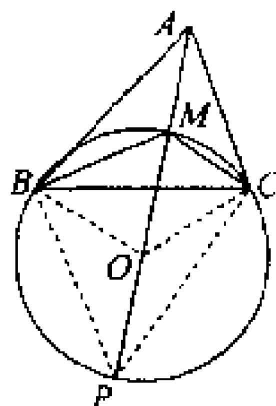


图 17-7

证明 设$\angle BAC=2\alpha$，则$\angle BMC=90^\circ+\alpha$. 于是

$$\angle BOC=2\angle BPC=2(180^\circ-\angle BMC)=2[180^\circ-(90^\circ+\alpha)]=180^\circ-2\alpha,$$

可知A、B、O、C四点共圆，有$\angle ABC=\angle AOC=2\angle MPC$. 注意到

$\angle MPC=\angle MBC$，故$\angle MBC=\frac{1}{2}\angle ABC$，$BM$ 平分$\angle ABC$．同理可证 CM 平分$\angle ACB$．所以点 M 是$\triangle ABC$ 内心．

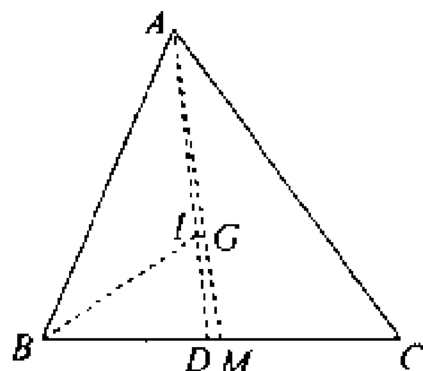


图 17－8

例 4　$\triangle ABC$ 中，$AB<BC<CA$，且三边长度为连续正整数，试求$\triangle ABC$ 的内心 I 与垂心 G 之间的距离．

解　如图 17－8，设 $AB=k-1$，$BC=k$，$CA=k+1$，k 为不小于 3 的整数．连结 AI 并延长交 BC 于 D，则

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}=\frac{AB+AC}{BC}=\frac{(k-1)+(k+1)}{k}=2.$$

且
$$\frac{k-1}{BD}=\frac{k+1}{k-BD},\qquad ①$$

又连结 AG 并延长交 BC 于 M，有$\frac{AG}{GM}=2$，故 $IG /\!/ DM$．

且 $IG=\frac{2}{3}DM$．由②得 $BD=\frac{k-1}{2}$．因此，

$$DM=BM-BD=\frac{k}{2}-\frac{k-1}{2}=\frac{1}{2}.$$

进而有 $IG=\frac{1}{3}$．

例 5　如图 17－9，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AD\perp BC$ 于 D，$DF\perp AB$ 于 F，$AE\perp CF$ 于 E，且交 DF 于M，求证 M 为DF 的中点．

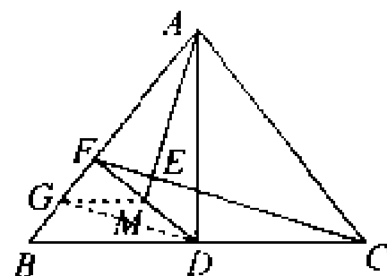


图 17－9

分析　M 为DF 中点

$\Uparrow$

$GM /\!/ BD$

（G 为 BF 中点）

$\Uparrow$

$GM\perp AD$

$\Uparrow$ $BD\perp AD$

M 为$\triangle AGC$ 的垂心

$$\Uparrow$$

$DF \perp AG \quad AM \perp DG \qquad AB = AC$

$\Uparrow \qquad\qquad AD \perp BC$

$CF \perp AE \qquad\qquad \Downarrow$

$CF /\!/ DG \quad \Leftarrow \quad BD = DC$

例 6 如图 17 - 10，已知$\angle ACE = \angle CDE = 90°$，点 B 在 CE 上，$CA = CB = CD$，过 A、C、D 三点的圆交 AB 于点 F. 求证 F 为$\triangle CDE$ 的内心.

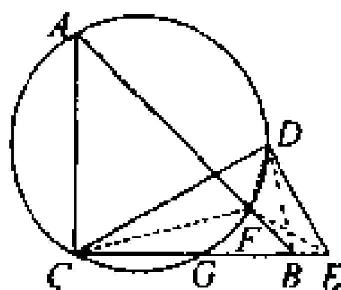


图 17 - 10

证明 连结 DF. 依题设有

$$\angle CDF = \angle CAB = 45° = \frac{1}{2}\angle CDE,$$

故 DF 为$\angle CDE$ 的平分线.

连结 BD、CF，由 $CD = CB$，知

$$\angle FBD = \angle CBD - 45° = \angle CDB - 45° = \angle FDB,$$

即 $FD = FB$，故 F 到 B、D 的距离相等，F 在线段 BD 的垂直平分线上，从而也在等腰三角形 CBD 的顶角平分线上，CF 是$\angle ECD$ 的平分线.

由于 F 是$\triangle CDE$ 上两条角平分线的交点，因而就是$\triangle CDE$ 的内心.

例 7 在$\triangle ABC$ 中，$AB = AC$，O 为$\triangle ABC$ 的外心，D 是 AB 的中点，E 是$\triangle ACD$ 的重心，求证：$OE \perp CD$.

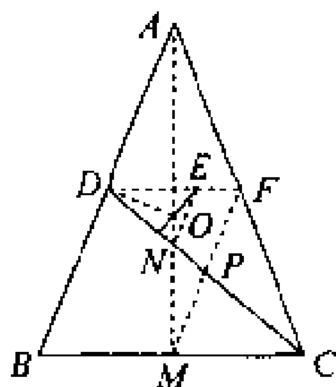


图 17 - 11

证明 如图 17 - 11，设 F 为 AC 中点，则 E 在 DF 上，且 $DE : EF = 2 : 1$.

设 M 为 BC 中点，因 $AB = AC$，故 $AM \perp BC$. 因 $DF /\!/ BC$，故 $AM \perp DF$. 设 AM、CD 交于 N，则 N 为$\triangle ABC$ 的重心. 连结 FM，交 CD 于 P，则 P 为 CD 中点. 于是

$$\frac{DN}{DP} = \frac{2}{3} = \frac{DE}{DF},$$

有 $EN /\!/ FP /\!/ AB$. 因 $DO \perp AB$，故 $DO \perp EN$，O 为$\triangle EDN$ 的垂心，可

得 $OE\perp CD$.

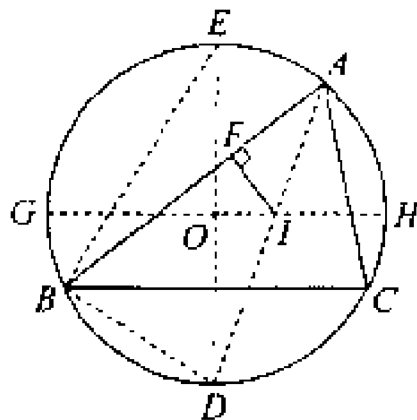


图 17－12

例 8 如图 17－12，$\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，R 和 r 分别为它的外接圆和内切圆的半径，则 $OI^2=R^2-r^2$.

证明 连 AI 交圆 O 于 D，连 DO，反向延长 OD 交圆 O 于 E，连 BD、BE，延长 OI 交圆 O 于 G、H，过 I 作 $IF\perp AB$ 于 F，则 $IF=r$，$DE=2R$.

因 $GI\cdot IH=AI\cdot ID$，而 $GI=R+OI$，$IH=R-OI$，所以 $GI\cdot IH=R^2-OI^2$，从而有

$$R^2-OI^2=AI\cdot ID.$$

由 $\angle BAD=\angle BED$，$\angle AFI=\angle EBD=90°$ 得 $\triangle AFI\backsim\triangle EBD$，则有 $\dfrac{AI}{DE}=\dfrac{IF}{BD}$，即

$$AI\cdot BD=DE\cdot IF=2Rr.$$

又 $\angle IBD=\dfrac{1}{2}\angle ABC+\angle DBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC+\dfrac{1}{2}\angle BAC=\angle BID$，则 $ID=BD$. 因此，

$$R^2-OI^2=AI\cdot ED=2Rr,$$

即
$$OI^2=R^2-2Rr.$$

注 上述命题称为欧拉定理. 注意到 $OI\geqslant 0$，故又有 $R\geqslant 2r$，即三角形外接圆的半径不小于内切圆的直径.

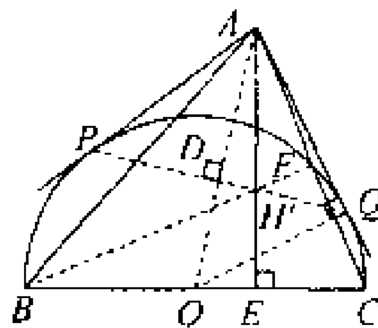


图 17－13

例 9 设 H 是锐角三角形 $\triangle ABC$ 的垂心，由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP、AQ，切点分别为 P、Q，求证：P、H、Q 三点共线.

分析 如图 17－13，AE 为 $\triangle ABC$ 的 BC 边上高，F 为 AC 与 $\odot O$ 交点，则 $BF\perp AC$. H 为 AE、BF 交点.

连结 PQ，交 AE 于 H'，欲证 P、H、Q 共线，可转而证明 H'、H 重

合,而这仅需证明 $BH' \perp AC$.

连结 OQ,则 $OQ \perp AQ$,又 $PQ \perp AO$,于是,在 Rt$\triangle AOQ$ 中,

$$AQ^2 = AD \cdot AO. \quad ①$$

又$\angle QDO = \angle AEO = 90°$,可知 O、D、H'、E 四点共圆,得

$$AD \cdot AO = AH' \cdot AE. \quad ②$$

根据切割线定理,有

$$AQ^2 = AF \cdot AC. \quad ③$$

由①,②,③得

$$AH' \cdot AE = AF \cdot AC,$$

从而知 H'、E、C、F 四点共圆,有

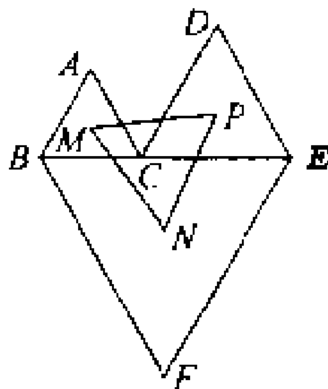
$$\angle H'EC + \angle H'FC = 180°.$$

因$\angle H'EC = 90°$,故$\angle H'FC = 90°$,即 $H'F \perp AC$. 又 $BF \perp AC$,所以 H' 在 BF 上,所以 H' 是$\triangle ABC$ 的垂心,与 H 重合.

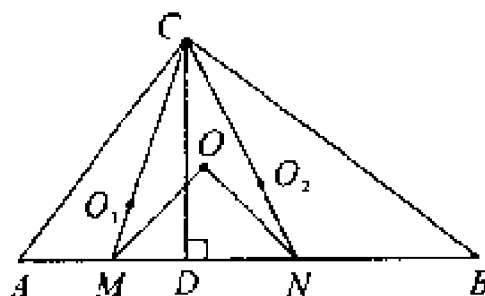
练 习 十 七

1. 已知 G 为$\triangle ABC$ 的重心,不过三角形顶点的直线 ℓ 过 G 点,从 A,B,C 三点向直线ℓ 引垂线AO、BF、CF,O、E、F 为垂足,求证:$AO = BE + CF$.

2. 如图,M、N、P 分别为正三角形$\triangle ABC$、$\triangle BFE$、$\triangle EDC$ 的重心.求证:$\triangle MNP$ 为正三角形.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图,在直角△ABC中,CD为斜边AB上的高,O、O_1、O_2分别为△ABC、△ACD、△BCD的内心. 连结CO_1,延长交AB于M,连CO_2延长交AB于N. 求证:$OM\perp ON$.

4. 锐角△ABC的内心和外心分别为I、O,$AB<AC$,$IO=\frac{1}{2}(AC-AB)$. 求证:$IO\parallel BC$.

5. 证明:锐角三角形的垂心与以三垂足为顶点的三角形的内切圆的圆心重合.

6. 设I为△ABC的内心,且A',B',C'分别是△IBC,△ICA,△IAB的外心,求证△ABC与△$A'B'C'$有相同的外心.

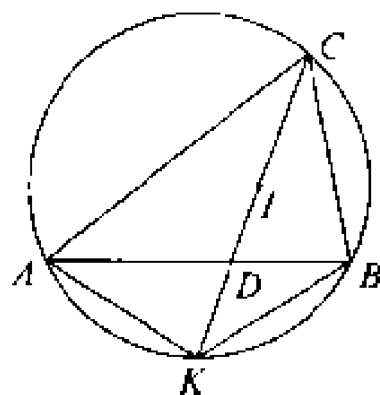
7. 已知正△ABC中,D、E、F分别是边AB、BC、CA上的任一点,O_1、O_2、O_3分别是△ADF、△BED、△CFE的外心. 求证:△$O_1O_2O_3$为正三角形.

8. 如图,在△ABC中,∠C的平分线交边AB及三角形外接圆于D,K,I是△ABC的内心,求证:

(1)$AK=BK=IK$;

(2)$\frac{1}{ID}-\frac{1}{IK}=\frac{1}{IC}$;

(3)$\frac{IC}{ID}-\frac{ID}{DK}=1$.



(第8题)

9. 已知△ABC中,高AD在其内部,过△ABD、△ACD的内心I_1、I_2引直线分别交AB、AC于E、F.

(1)若∠$BAC=90°$,则$AE=AF$.

(2)若$AE=AF$,则∠$BAE=90°$也成立吗? 若仍成立,请证明;若不成立,请说明理由,并指出不成立的情形.

10. 如图,H为△ABC的垂心,D、E、F分别为BC、CA、AB的中点,一个以H为圆心的圆交直线DE于P、Q,交直线EF于R、S,交直线FD于T、V. 试证明

$CP=CQ=AR=AS=BT=BV$.

11. 三角形的两角的外角平分线和第三个角的内角平分线的交点称为该三角形的一个旁心. 现若已知 O、I 分别为$\triangle ABC$ 的外心和内心, AD 是 BC 边上的高, I 在线段 OD 上. 求证:$\triangle ABC$ 外接圆半径等于 BC 边上的旁切圆半径.

（第 10 题）

12. 设 I_1、I_2、I_3 分别为$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 外的旁心, A_1、B_1、C_1 分别为$\triangle I_1BC$、$\triangle I_2CA$、$\triangle I_3AB$ 的外心. 求证:$\triangle ABC$ 与$\triangle A_1B_1C_1$ 有相同的外心.

第十八讲　面　积

知识点和方法述要

1．如图 18－1．D 为 AB（或反向延长线）上点，E 为 AC 上的点，则

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}. \qquad ①$$

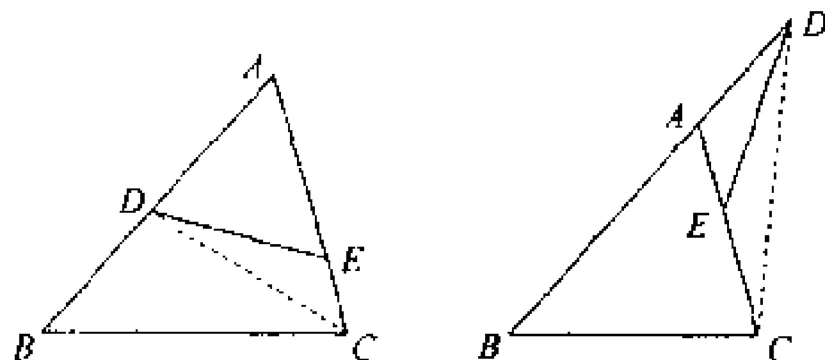


图 18－1

证明　连结 CD，有

$$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD}{AB},$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACD}}=\frac{AE}{AC}.$$

两式相乘即得①式．

2．$S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{1}{2}AB\cdot AC$．当$\angle A=90^{\circ}$时取等号．

3．有关面积的计算常采用割补的办法，将不规则、难以直接计算的图形的计算转化为规则、易于计算的图形计算．

4．$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^{2}$．（扇形的圆心角为 n°）

5．各边相等，各角也相等的多边形叫做正多边形．

任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心

圆.

例 题 精 讲

例1 如图 18－2,锐角△ABC 中,$\angle A=30°$,以 BC 为直径作圆 O,与 AB、AC 分别交于 D、E,连结 DE,把△ABC 分成△ADE 与四边形 $DBCE$,试求 $S_{\triangle ADE}:S_{DBCE}$.

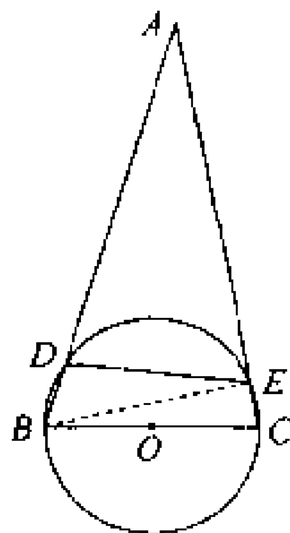


图 18－2

解一 连结 BE.因 BC 为圆 O 直径,故 $\angle AEB=90°$,$\cos A=\dfrac{AE}{AB}$.

因 $\angle AED=\angle ABC$,$\angle A$ 公共,故 $\triangle AED\backsim\triangle ABC$,又 $\angle A=30°$,于是

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}}=(\frac{AE}{AB})^2=\cos^2A=\cos^2 30°=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=\frac{3}{4}.$$

可得
$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AED}}=\frac{3}{4-3}=3.$$

即
$$S_{\triangle AED}:S_{DBCE}=3:1$$

解二 连结 BE,则 $\angle AEB=90°$,有 $AE=AB\cos A$.同理有 $AD=AC\cos A$.因 $A=30°$,故

$$\begin{aligned}\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}&=\frac{\frac{1}{2}AD\cdot AE\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}\\&=\frac{\frac{1}{2}AB\cos A\cdot AC\cos A\cdot\sin A}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A}\\&=\cos^2 A\\&=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\\&=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

例 2 如图 18－3，AB 是半圆 O 的直径，C 在半径 OA 上，D 在半圆 O 上，且 $CD\perp AB$，E 在 CD 上，$\odot E$ 与 AB 相切于 C，与半圆 O 相切于 F，$AB=6$，$CD=\sqrt{6}$，试求 $\overset{\frown}{CF}$、$\overset{\frown}{FA}$ 及 AC 所围成的面积.

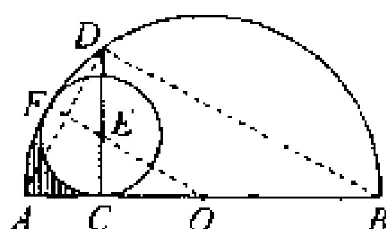


图 18－3

解 连结 AD、BD，依题设$\angle ADB=90°$，且 $CD\perp AB$，

故 $$CD^2=AC\cdot AB,$$

即 $$AC\cdot(AB-AC)=CD^2$$

$$\Leftrightarrow AC(6-AC)=(\sqrt{6})^2.$$

解得 $AC=3\sqrt{3}$(舍去)或 $AC=3-\sqrt{3}$.

连结 OE，延长交圆 O 于 F. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COE$ 中，

$$CE^2+CO^2=OE^2,$$

即 $$CE^2+(OA-AC)^2=(OF-EF)^2,$$

$$\Leftrightarrow CE^2+(\sqrt{3})^2=(3-CE)^2,$$

解得 $CE=1$. 进而得 $OE=2$，$\angle AOF=30°$. 于是

$$S_{阴影}=S_{扇形AOE}-S_{\triangle COE}-S_{扇形CEF}$$

$$=\frac{30\cdot\pi\cdot 3^2}{360}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1-\frac{120\cdot\pi\cdot 1^2}{360}$$

$$=\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{12}.$$

例 3 圆内接六边形 $ABCDEF$ 中，$AB=BC=CD=3\text{cm}$，$DE=FE=FA=5\text{cm}$，设 $S_{六边形ABCDEF}=S$，试求 S.

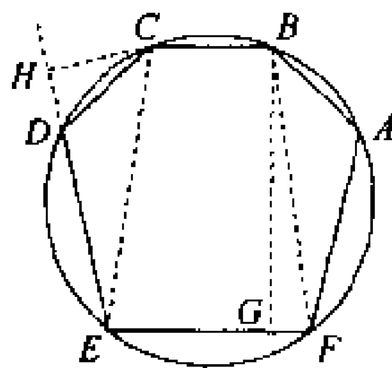


图 18－4

解 如图 18－4，过 C 作 $CH\perp ED$，交 ED 的延长线于 H.

连结 CE、BF，则

$$\angle CDE\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{EF})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times 360°=120°.$$

同理可证$\angle BAF=120°$. 故$\angle CDH=60°$, $DH=CD\cos60°=\frac{3}{2}$, $CH=CD\sin60°=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 所以

$$CE=\sqrt{CH^2+HE^2}=\sqrt{(\frac{3\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{3}{2}+5)^2}.$$

同理可证　$BF=7$.

由 $CE=BF$,可得 $BC=EF$,所以四边形 $BCEF$ 为等腰梯形.

作 $BG\perp EF$ 交 EF 于 G,则

$$GF=\frac{1}{2}(EF-BC)=\frac{1}{2}(5-3)=1.$$

在 $Rt\triangle BGF$ 中,

$$BG=\sqrt{BF^2-GF^2}=\sqrt{7^2-1^2}=4\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}DE\times CH=\frac{1}{2}\times5\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

同理可得　$S_{\triangle ABF}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

又　$$S_{梯形BCEF}=\frac{1}{2}(BC+EF)\cdot BG=\frac{1}{2}(3+5)\cdot4\sqrt{3}=16\sqrt{3}.$$

故　$$S=S_{\triangle CDE}+S_{\triangle ABF}+S_{梯形BCEF}=\frac{15\sqrt{3}}{4}+\frac{15\sqrt{3}}{4}+16\sqrt{3}=\frac{47\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2).$$

例 4　已知 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 各边 BC,CA,AB 上的点,且$\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}$,则$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 有相同的重心.

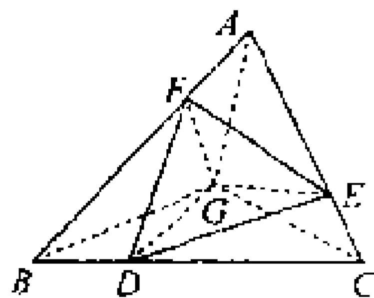


图 18－5

证明　如图 18－5,设$\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{m}{n}$,可得

$$\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AF\cdot AE}{AB\cdot AC}=\frac{AF}{AB}\cdot\frac{AE}{AC}=\frac{mn}{(m+n)^2},$$

有 $$S_{\triangle AFG}=\frac{mn}{(m+n)^2}S_{\triangle ABC},$$

同理 $$S_{\triangle BDF}=S_{\triangle CED}=S_{\triangle AFE}=\frac{mn}{(m+n)^2}. \quad ①$$

令 G 为$\triangle ABC$ 的重心,连 GA,GB,GC,GD,GE,GF.则

$$\frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle ABG}}=\frac{AF}{AB}=\frac{m}{m+n}.$$

于是 $$S_{\triangle AFG}=\frac{m}{m+n}S_{\triangle ABG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{m+n}\cdot S_{\triangle ABC},$$

同理 $$S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CEG}=S_{\triangle AFG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{m+n}S_{\triangle ABC}, \quad ②$$

$$S_{\triangle BFG}=S_{\triangle CDG}=S_{\triangle AEG}=\frac{1}{3}\cdot\frac{m}{m+m}S_{\triangle ABC}. \quad ③$$

②+③ 得 $S_{BDGF}=S_{CEGD}=S_{AFGE}$ ④

④-①得 $S_{\triangle BGF}=S_{\triangle DGE}=S_{\triangle EGF}$,

所以 G 为$\triangle DEF$ 的重心.

例 5 如图 18-6,半圆 O 的半径为 1,$AC\perp AB$ 于 A,$BD\perp AB$ 于 B,且 $AC=1$,$BD=3$,P 是半圆 O 上任意一点.试求封闭图形 $ABDPC$ 面积 S 的最大值.

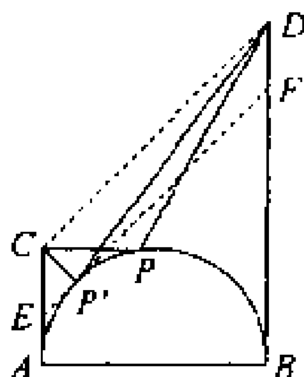


图 18-6

分析 连结 CD,

$$S_{直角梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AC+BD)\cdot AB=\frac{1}{2}(1+3)\cdot 2=4.$$

注意到 $S=S_{直角梯形ABCD}-S_{\triangle PCD}$,只需考虑 $S_{\triangle PCD}$的最小值.为此又只须考察 P 到 CD 的距离的最小值.显然 P 在与 CD 平行的半圆 O 的切线 EF 上即为其切点时可达到最小值.此时,四边形 $CDEF$ 为平行四边形.根据切线长定理,可得

$$AE+BF=EF=CD=\sqrt{(BD-AC)^2+AB^2}=2\sqrt{2}.$$

于是 $$EC=DF=\frac{1}{2}[AC+BD-(AE+BF)]=2-\sqrt{2},$$

进而,有 $$S=4-S_{\triangle PCD}$$

$$=4-\frac{1}{2}S_{\square CDFE}$$
$$=4-\frac{1}{2}CE\cdot AB$$
$$=4-\frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\cdot 2$$
$$=2+\sqrt{2}.$$

例6 两个全等矩形的边相交于8个点. 证明:这两个矩形公共部分的面积大于每个矩形面积的一半.

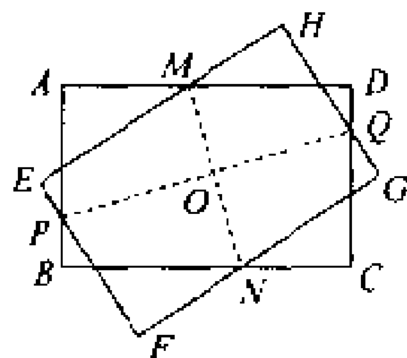


图 18－7

证明 如图18－7,矩形 $ABCD$ 与矩形 $EFGH$ 全等,M、N 与 P、Q 分别为两矩形不同方向上两组对边交点. 连 MN、PQ 交于 O. 由于 N 到 EM 的距离等于 N 到 DM 的距离,故 $\angle EMN=\angle NMD$. 同理 $\angle BNM=\angle GNM$, $\angle APQ=\angle FPQ$, $\angle HQP=\angle CQP$. 由此易知 $\angle EMN=\angle FPQ$,故 E、P、O、M 四点共圆, $\angle POM=\angle PEM=90^\circ$,因此 $MN\perp PQ$. 设两个矩形公共部分的面积为 S,则

$$S\geqslant S_{PNQM}=\frac{1}{2}MN\cdot PQ>\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

命题获证.

例7 锐角 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 的平分线交 BC 于 L,交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 N, $LK\perp AB$,交 AB 于 K, $LM\perp AC$ 交 AC 于 M,求证: $S_{\triangle ABC}=S_{AKMN}$.

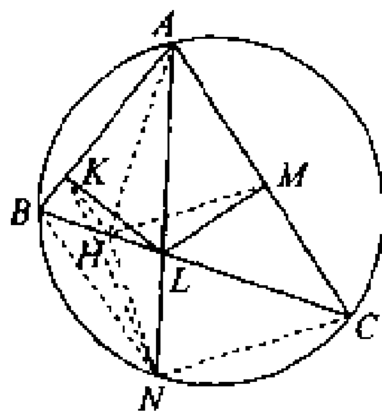


图 18－8

证明 作 $\triangle ABC$ 的高 AH,连 KH、HM、HN、BN、KH、CN(图18－8), A、K、H、L、M 五点共圆,有

$$\angle KHB=\angle BAL=\angle NAC=\angle HBN,$$
$$\angle MHC=\angle MAN=\angle NAB=\angle NCH.$$

故知 $KH/\!/BN$, $HM/\!/NC$. 从而有

$$S_{\triangle KBH}=S_{\triangle KNH},$$

$S_{\triangle HMC} = S_{\triangle HMN}$.

故 $S_{\triangle ABC} = S_{AKNM}$.

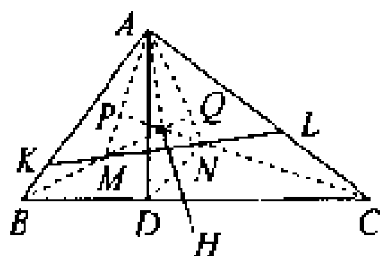


图 18－9

例 8 在直角三角形 ABC 中，AD 是斜边 BC 上的高，连接三角形 ABD 的内心与三角形 ACD 的内心的直线分别与边 AB 及边 AC 相交于 K 及 L 两点，三角形 ABC 与 AKL 的面积分别记为 S 和 T. 求证：$S \geqslant 2T$.

证明 如图 18－9，设 M、N 为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内心，H 为 $\triangle ABC$ 的内心. M、H 在 $\angle ABC$ 的平分线上，知 B、M、H 共线. 同理 C、N、H 共线，且 AM 是 $\angle BAD$ 的平分线，AM 交 CN 于 P，$\angle MAD = \angle PCD$，故 $CP \perp AM$. 设 AN 与 BH 交于 Q. 同理 $BQ \perp AN$. 于是 H 为 $\triangle AMN$ 的垂心，$AH \perp LK$，$\angle KAH = \angle LAH$，即 $\angle ALK = 45°$. $\triangle ALN \cong \triangle ADN$. 设 $AD = h$，则 $T = \frac{1}{2}h^2$，又 $S = \frac{1}{2}ch$ 且注意到 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 斜边上中线不小于 h，有 $c \geqslant 2h$，故 $S \geqslant 2T$.

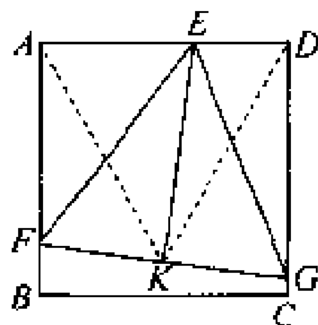


图 18－10

例 9 设有一边长为 1 的正方形，试在这个正方形的内接正三角形中找出一个面积最大的和一个面积最小的，并求出这两个面积（须证明其论断）.

分析 如图 18－10，假设 $\triangle FGE$ 为正方形 $ABCD$ 的任一内接正三角形，则正三角形的三个顶点必落在正方形三边上，不妨设其中的 F、G 是在正方形的一组对边上.

作 $\triangle EFG$ 边 FG 上的高 EK，则 E、K、G、D 四点共圆，连结 KD，则有 $\angle KDE = \angle KGE = 60°$. 同理有 $\angle KAE = \angle KFE = 60°$. 所以 $\triangle KDA$ 为正三角形，而 K 是它的一个顶点，故知内接正 $\triangle EFG$ 的边 FG 中点必是不动点 K.

正三角形的面积由边长决定. 当 $KF \parallel BC$ 时，边长为 1，这时边

长最小,面积 S 等于$\frac{\sqrt{3}}{4}$也最小;当 EF 通过 B 点(即 F 与 B 重合)时,边长最大,此时

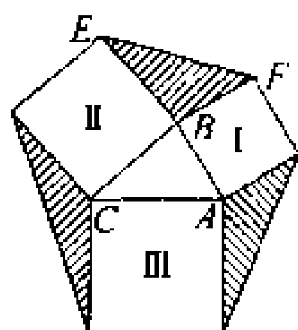
$$边长=2BK=2\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=2\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

面积 S 等于 $2\sqrt{3}-3$ 也最大.

练 习 十 八

一、填空题

1. 如图,$\triangle ABC$ 中 $AB=2, AC=3$, Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ分别表示以 AB、BC、CA 为边的正方形,则图中阴影部分的面积之和的最大值是________.



(第1题)

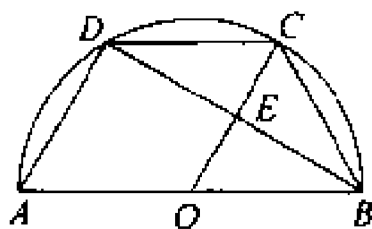
2. 已知 AB 为⊙O 的直径,M 为 OB 上一点,且 $AM:MB=7:1$,过 M 任作一弦 PQ,则 $S_{\triangle APQ}$的最大值是________.

3. 已知以 AB 为直径的半圆上有两点 C、D,使 $\angle DCB=120°$, $\angle ADC=105°$, $CD=1$,则 $S_{四边形ABCD}=$________.

4. ⊙O 和⊙O'相交于A、D 两点,⊙O'的切线AB 交⊙O 于点B,⊙O 的切线AC 交⊙O'于点 C.若$\angle BAD=45°$, $\angle CAD=30°$, $O'A=5\sqrt{2}$,则$\angle BAD$ 所对的弧与 BD 所构成的弓形面积等于________.

5. ⊙O 是边长为 1 的正六边形 $ABCDEF$ 的内切圆,P 为⊙O 和 DE 边的切点,Q、R 分别是 PA、PB 与⊙O 的交点,则 $S_{\triangle PQR}=$________.

6. 如图,四边形 $ABCD$ 内接于⊙O, AB 为直径且 $AB=2$, $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}S_{梯形AOCD}$,则 $S_{\triangle OBC}=$________.



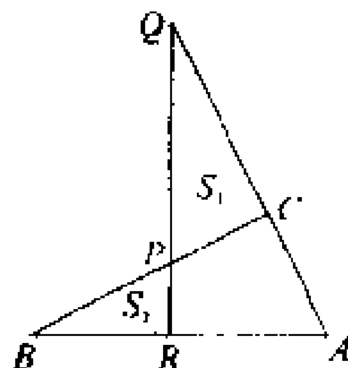
(第6题)

二、解答题

7. 已知⊙O内两条弦AB、DC的延长线相交于P,且$\angle P=90°$,求证:$S_{\triangle OAD}=S_{\triangle OBC}$.

8. 在圆内接四边形$ABCD$中,$AC\perp BD$,求证:$2S_{四边形ABCD}=AB\cdot CD+AD\cdot BC$.

9. 如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$CB=a$,$CA=b$,$AB=c$,点P是BC上异于B、C的任一点,过P作AB的垂线与边AB及AC的延长线分别交于R、Q.



(第9题)

(1)设$PC=x$.$\triangle PQC$、$\triangle PBR$的面积分别为S_1、S_2,试用x,a,b,c表示S_1+S_2;

(2)当点P在BC上移动时,问x取何值时,S_1+S_2有最小值?并求出这个最小值.

10. 已知圆O与圆O_1相交于A、B两点,过点A、B任作两平行线交圆O于点P、R,交圆O_1于点Q、S.求四边形$PQSR$面积的最大值.

11. 已知B为半圆O上一点,A为直径延长线一点,且OA等于半圆直径,以AB为边作正$\triangle ABC$,使点C与O在AB两侧.求$S_{四边形ACBO}$的最大值.

12. 设E为正方形$ABCD$一边AB的中点,在边BC和CD上分别取两点F和G,并且使$AG\parallel EF$,试证:直线FG与正方形$ABCD$的内切圆相切.

第十九讲　覆盖与嵌入

知 识 点 和 方 法 述 要

1.(1)一般地,设 G 和 F 是两个平面图形.如果图形 F 或由图形 F 经过若干次的平移、旋转、对称等变换后得到的大小形状不变的图形 F' 的每一点都在图形 G 上,我们就说图形 G 覆盖图形 F.反之,如果 F 或 F' 中总至少存在一点不在图形 G 上,我们说图形 G 不覆盖图形 F.

(2)对于图形 $G_1, G_2, \cdots, G_n$,若图形 F 中的每一点都被这组图形中的某个覆盖,则称这 n 个图形覆盖 F.

2. 图形覆盖具有以下明显性质:

(1)若图形 G 覆盖图形 F,图形 F 覆盖图形 H,则图形 G 覆盖图形 H;

(2)若图形 F 的面积大于图形 G 的面积,则图形 G 不能覆盖图形 F.

3. 图形嵌入实际上是图形覆盖的一种变化.所谓图形 F 能嵌入图形 G,实质上就是图形 G 能覆盖图形 F.

例 题 精 讲

例1　求证:(1)周长为 2ℓ 的平行四边形能够被半径为 $\frac{\ell}{2}$ 的圆面所覆盖.

(2)桌面上放有一丝线做成的线圈,它的周长是 2ℓ,不管线圈形状如何,都可以被一个半径为 $\frac{\ell}{2}$ 的圆纸片所覆盖.

分析　(1)关键在于圆心位置.考虑到平行四边形是中心对称图

形，选择对角线交点作覆盖圆圆心是理想的. 事实上，如图 19－1，设 $\square ABCD$ 中，BD 是较长对角线，O 为对角线交点，则 $OD \geqslant AO$，$\angle 1 \geqslant \angle 2$. 设 P 为周界上任一点，不妨设 P 在 AD 上，那么 $\angle 3 > \angle 1 \geqslant \angle 2$，故 $OD \geqslant OP$，以 O 为圆心，OD 为半径的圆面一定可以覆盖点 P，从而也能覆盖整个平行四边形. 又 $BD < AB + AD = \ell$，有 $OD < \frac{\ell}{2}$. 故周长为 2ℓ 的平行四边形能被半径为$\frac{\ell}{2}$的圆覆盖.

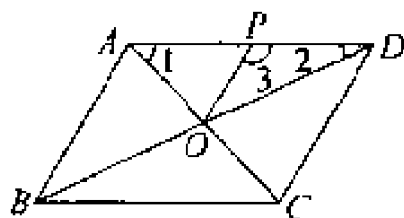


图 19－1

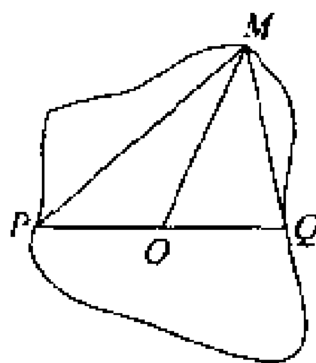


图 19－2

(2)对于任意形状的线圈 ℓ，尝试"曲"化"直"，化归为简单图形. 如图 19－2，类比(1)，取均分曲线的两点 P、Q，设法证明 PQ 中点 O 为满足要求覆盖圆圆心. 设 M 是 ℓ 上任意一点，连 MP、MQ，则

$$OM \leqslant \frac{1}{2}(MP + MQ) \leqslant \frac{1}{2}(\overset{\frown}{MP} + \overset{\frown}{MQ}) = \frac{\ell}{2}.$$

因此，以 O 为中心，以$\frac{\ell}{2}$长为半径的圆纸片一定可以覆盖住整个线圈.

例 2　证明：若$\triangle ABC$ 的最大边长是 a，则这个三角形可以被一个半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$ 的圆所覆盖.

证明　$\triangle ABC$ 中，a 为最大边长，则 $60° \leqslant A \leqslant 180°$，从而以 BC 为弦，在点 A 所在一侧作含 $60°$角的弓形弧，那么点 A 在此弓形内，这表明$\triangle ABC$ 可被此圆覆盖.

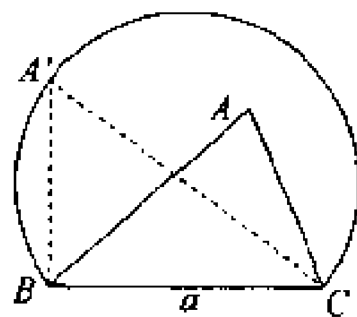


图 19－3

如图 19－3，作直径 CA'，连结 $A'B$，则$\angle A'BC = 90°$，$\angle BA'C =$

60°,可得

$$A'C = 2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

故 $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$,即为上述覆盖圆的半径.

例 3 以▱$ABCD$ 的边为直径向平行四边形内作四个半圆.证明这四个半圆一定覆盖整个平行四边形.

分析一 要证明这四个半圆覆盖整个平行四边形,只要证▱$ABCD$ 的每一点至少属于其中一个半圆即可.

用反证法.设 P 为▱$ABCD$ 内一点,且不在以 AB、BC、CD、DA 为直径所作的圆内.如图 19 - 4 所示.知$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPD$、$\angle DPA$ 均小于 90°.则

$$\angle APB + \angle BPC + \angle CPD + \angle DPA < 360^\circ,$$

与四角和为周角相矛盾.故 P 至少属于其中一个半圆,即所作四个半圆覆盖四边形 $ABCD$.

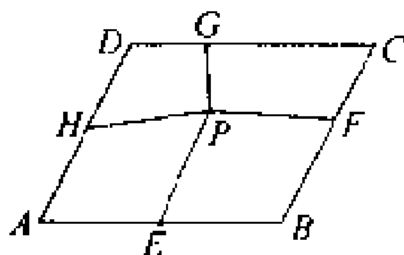


图 19 - 4

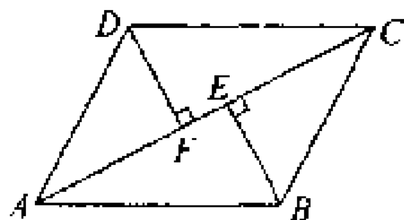


图 19 - 5

分析二 设法将▱$ABCD$ 分为若干部分,使每一部分都被上述四半圆所覆盖.不妨设 $AC \geqslant BD$.过 B、D 作 AC 垂线,垂足 E、F,将▱$ABCD$ 分成四个直角三角形:$\triangle AEB$,$\triangle BEC$,$\triangle CFD$,$\triangle DFA$.如图 19 - 5,每一个直角三角形被一个半圆所覆盖,从而整个四边形被四个半圆覆盖.

例 4 给定一个半径为 1 的圆面,用半径为$\frac{1}{2}$的圆面去盖它.问至少要几个圆面才能盖住?

分析 问题需要我们从两方面作出回答:指出一定数量的半径

为$\frac{1}{2}$的圆面应能覆盖单位圆,同时还须证明少于这个数量则不行.

四个半径为$\frac{1}{2}$的圆,其面积的和正好等于半径为1的圆面积,但若不重叠,它们所包围的区域内一定存在不属于它们的点,因此,这些小圆不能覆盖单位圆.少于4个小圆更不可能.

若5个小圆.因小圆直径为1.大圆周分成六等分,每段弧所对弦长为1,则五个小圆无法盖住大圆周,更不能盖住圆.

从上面分析可以看到,只盖住圆周就需六个小圆,但此时它们又无法盖住圆心,因此仅六个小圆仍无法覆盖大圆.

若有7个半径为$\frac{1}{2}$的小圆则可覆盖半径为1的单位圆:作大圆的内接正六边形,使六个小圆的圆心与这正六边形的边中点重合,第七个小圆圆心与大圆圆心重合,即可盖住大圆,如图19-6.

事实上,我们取OA、OB、OC、OD、OE、OF的中点A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1.因为$\triangle OAB$为正三角形,所以$\angle BB_1A=90°$.B_1在AB为直径的圆上.同样A_1也在AB为直径的圆上.

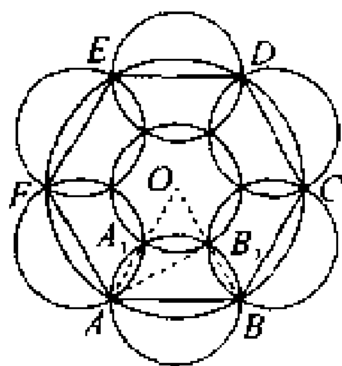


图19-6

故AB为直径的圆覆盖四边形A_1ABB_1.又以O为圆心,以$\frac{1}{2}$为半径的圆覆盖$\triangle OA_1B_1$,类似地可证得这七个圆覆盖整个单位圆.

例5 求证:一个直径为1的圆不能被两直径小于1的圆所覆盖.

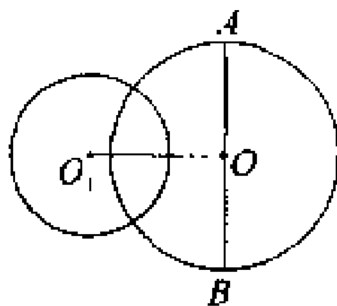


图19-7

证一 先设一个直径小于1的圆O_1去覆盖直径为1的圆,如图19-7.连O_1O,过O作$AB\perp O_1O$,AB为圆O的直径(若O_1,O重合,则AB为任意直径),此时$O_1A=O_1B\geqslant OA$,故A、B两点都不能被圆O_1盖住.另一直径小于1的圆O_2也不能同时盖住A、B两点,故圆O_1、圆O_2不能覆盖圆O.

证二 直径小于 1 的圆 O_1 不能覆盖直径为 1 的圆 O 的半个圆周，否则圆 O_1 的直径不能小于圆 O 的半径的直径. 这不可能. 因此两小圆不能覆盖整个大圆.

例 6 把一个半径为 1.1 的圆形纸片放到直角坐标平面上，问纸片最少要盖住几个整点？最多能盖住几个整点？

分析 首先考虑，图形纸片能否保证覆盖住一个整点. 设圆心 M 落在某一小正方形 $PQRS$ 的内部或边上，如图 19－8，所示. 那么 MP、MQ、MR、MS 中至少有一线段长不大于对角线的一半，即不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 不失一般性，设 $MS\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}<1.1$，整点 S 必在圆 M 内. 故圆纸片可覆盖一个整点. 然而，该圆形纸片在覆盖住一个整点的同时是否也覆盖住另一整点呢？事实正是这样. 假设圆 M 只盖住一个整点 S，那么 $|MP|>1.1>1$. 由此，点 M 在以 P 为圆心，1 为半径的圆外. 同理，点 M 也应在以 R 为圆心，1 为半径的圆外. 这是不可能的. 如图 19－9，因为扇形 PSQ 和扇形 RSQ 已经覆盖了整个正方形，而 M 应在正方形内，故圆 M 不可能只覆盖一个整点.

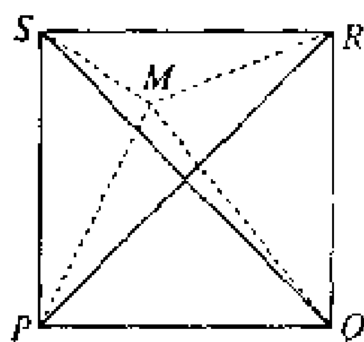


图 19－8

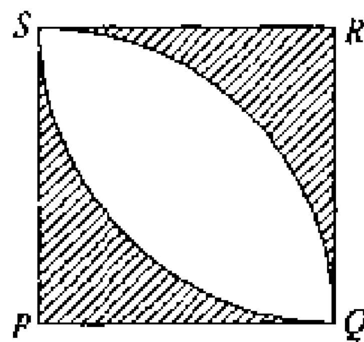


图 19－9

圆形纸片能否恰好覆盖两个整点. 对此我们只须设计一种具体覆盖方案即可. 如图 19－10，把圆心置于某个小正方形 $ABCD$ 一边的中点. 那么 $MA=MB=\frac{1}{2}$，故点 A、B 在圆 M 内，而 $MC=MD=ME=MF=\frac{\sqrt{5}}{2}>1.1$. 故点 C、D、E、F 在圆 M 外，至于其它整点，则更不可

能在圆内.

综上所述,我们可断言该圆纸片最少盖住两个整点.

又若我们把圆心 M 落在一个整点上,那么圆纸片可盖住五个整点,如图 19－11. 能否盖住更多整点呢? 回答是否定的. 若圆 M 盖住的整点超过五个,那么无论如何选择整点,总有一对整点的距离将不小于$\sqrt{5}>2.2$,直径为 2.2 的圆是不可能盖住这对整点的.

可见该圆纸片最多只能盖住五个整点.

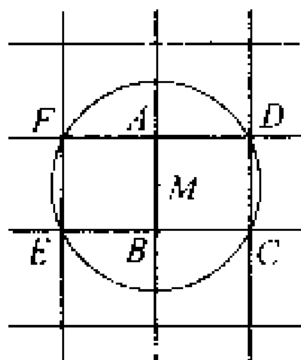


图 19－10

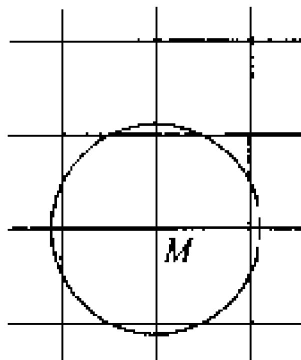


图 19－11

例 7 证明:若平面图形 F 上任意两点间最大距离为 1,则 F 可被一个边长为$\sqrt{3}$的正三角形覆盖.

分析 利用一对平行线可把图形 F 夹在一个带形区域内.

现作三组平行线,a、a',b、b',c、c'. 使它们彼此夹角为 60°,围成覆盖 F 的一个六边形. 如图 19－12 所示,交得正三角形 $A_1B_1C_1$ 和 $A_2B_2C_2$. 设 P 为 F 中任意一点,它到六边形各边距离分别为 d, e, f, x, y, z. 又设正三角形 $A_1B_1C_1$、$A_2B_2C_2$ 的高分别为 h_1, h_2. 根据正三角形性质,正三角形内一点到三边距离和等于正三角形的高. 于是

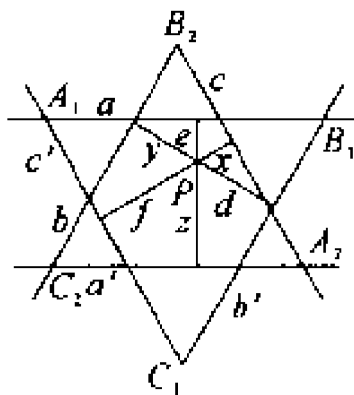


图 19－12

$$d+e+f=h_1,$$

$$x+y+z=h_2,$$

相加得 $$(d+x)+(c+y)+(f+z)=h_1+h_2,$$

又 $d+x\leqslant 1, c+y\leqslant 1, f+z\leqslant 1$,故 $h_1+h_2\leqslant 3$. 由此可断定 h_1, h_2 中

至少有一个不大于$\frac{3}{2}$,不妨设$h_1\leqslant\frac{3}{2}$,即正三角形$A_1B_1C_1$的高不大于$\frac{3}{2}$,那么其边长$\leqslant\frac{\frac{3}{2}}{\sin 60^\circ}=\sqrt{3}$. 因此图形$F$可被边长不大于$\sqrt{3}$的正三角形覆盖,其中也就包括边长正好是$\sqrt{3}$的正三角形.

例 8 证明:面积为S,周长为p的凸四边形一定可嵌入一个半径为$\frac{S}{p}$的圆.

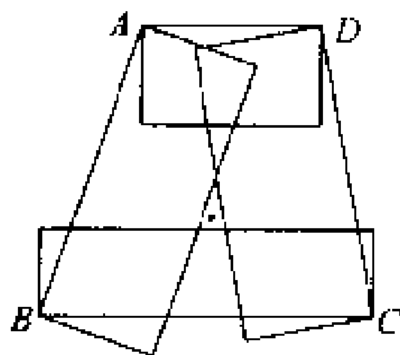


图 19－13

分析 若能证明四边形内部存在的四边形各边距离不小于$\frac{S}{p}$的点,问题即可得证. 为此,我们分别以凸四边形各边为边,$\frac{S}{p}$为另一边,向四边形内侧作四个矩形(图 19－13),它们的面积和为

$$
\begin{aligned}
S&=AB\cdot\frac{S}{p}+BC\cdot\frac{S}{p}+CD\cdot\frac{S}{P}+DA\cdot\frac{S}{p}\\
&=(AB+BC+CD+DA)\cdot\frac{S}{p}\\
&=p\cdot\frac{S}{p}=S.
\end{aligned}
$$

即这四个矩形面积总和等于四边形面积. 由于这四个矩形有重迭部分,所以它们所覆盖面积小于S,也就不能覆盖整个四边形,从而在四边形内存在一点O到四边形各边的距离大于$\frac{S}{p}$. 以O为圆心,$\frac{S}{p}$为半径的圆可嵌入四形$ABCD$内部.

例 9 在一个半径为 18 的圆中已嵌入 16 个半径为 3 的圆. 证明在余下的部分中还能嵌入 9 个半径为 1 的圆.

分析 研究同时嵌入 9 个圆的情形既困难又无必要,依题意,我们可以改变考虑问题角度,先证明总能嵌入一个半径为 1 的圆,这不难办到. 将每个半径为 3 的圆膨胀为半径为 4 的圆,将半径为 18 的

大圆收缩为半径为 17 的圆(图 19 - 14). 只须证明在半径为 17 的圆中,去掉 16 个半径为 4 的圆后,还存在一点 A_1,那么以 A_1 为圆心,1 为半径的圆即可嵌入大圆,且与 16 个半径为 3 的圆不重叠. 事实上

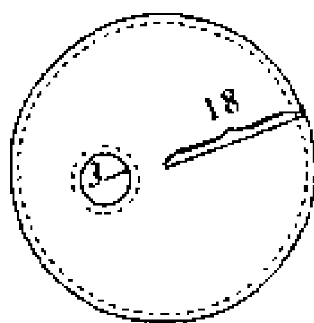


图 19 - 14

$$\pi\cdot 17^2 - 16\cdot\pi\cdot 4^2 = 289\pi - 256\pi = 33\pi > 0.$$

采用同样的方法,将大圆半径缩小 1,将已经嵌入的 17 个圆半径都增加 1,那么

$$289\pi - 256\pi - \pi\cdot 2^2 = 29\pi > 0.$$

这表明大圆中除 16 个半径为 4 和 1 个半径为 2 的圆外,还存在一点 A_2,从而在大圆中,除嵌入的 16 个半径为 3 的圆和一个半径为 1 的圆外,还可再嵌入一个半径为 1 的圆.

依此类推,由

$$(\pi\cdot 17^2 - 16\cdot\pi\cdot 4^2) \div (\pi\cdot 2^2) = 33\pi \div 4\pi > 8$$

即知命题成立.

注 本例中我们采用的将圆膨胀、收缩的放缩法是解决覆盖问题的一项重要手段.

练 习 十 九

1. 试用给定的同样的但非正方形的四边形地砖铺设地板,既不能有缝隙,又不许重叠,应该怎样铺?

2. 设$\triangle ABC$ 被多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 覆盖,证明:$\triangle ABC$ 的面积一定不大于以多边形顶点为顶点的三角形中面积最大者.

3. 证明一个单位圆不能覆盖面积超过 2 的矩形.

4. 给定一凸多边形,它不可能把任何面积为 1 的三角形放在其中. 证明:能把这个多边形放入面积为 4 的三角形.

5. 已知$\triangle ABC$ 与三个矩形 P、Q、R,矩形的边平行于两个固定的方向. 三个矩形完全盖住了 AB、BC、CA 三条边. 证明:这三个矩形

完全覆盖△ABC.

6. 在边长为 20×25 的矩形内，任意放置 120 个单位正方形. 证明：在矩形内还可以嵌入一个直径为 1 的圆.

7. 证明：在直角坐标平面上，如果两边平行坐标轴的一固定的正方形 $ABCD$ 边长大于 1，则这一正方形一定盖住了一个整点.

8. △ABC 的最大边 BC 的长是 a，求覆盖△ABC 的最小圆面.

9. 若△ABC 中，三边长 a, b, c 满足 $a^2+b^2+c^2<6$，求证：可以用一个半径为 1 的圆（即单位圆）覆盖△ABC.

10. 平面上有 A、B、C、D 四点，其中任意两点间的距离都不超过 1. 求总能覆盖这四点的最小圆面.

11. 任意剪六个圆纸片放在桌面上，使得没有一个纸片的中心落在另一个纸片上或被别一个纸片盖住. 然后用一个图钉去钉这一堆纸片. 证明：不论钉尖落在哪一点，总是不能一次把六个纸片都钉住.

第二十讲　抽屉原理

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 抽屉原理(狄利克富原理)的最简形式是

原理一　将 $n+1$ 个苹果放进 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里不止一个苹果.

更一般地，是

原理二　把 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ 个苹果放进 n 个抽屉里，那么或在第一个抽屉里至少放有 m_1+1 个苹果，或在第二个抽屉里至少放有 m_2+1 个苹果，…，或在第 n 个抽屉里至少放有 m_n+1 个苹果.

特别地，当 $m_1=m_2=\cdots m_n=m$ 时，原理二变为

原理三　把 $mn+1$ 个苹果以任意方式全部放入 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有不止 $m+1$ 个苹果.

当 $m=1$ 时，原理三即原理一.

以上统称抽屉原理.

2. 存在性问题是数学研究中常遇到的问题. 当问题仅须表明"存在"，而不需要确切指出具体对象，也不需要确定把存在的对象具体找出来的方法时，常用到抽屉原理.

3. 运用抽屉原理关键在于能够把握问题的本质，认识到运用抽屉原理的必要并合理地制造抽屉.

例 题 精 讲

例 1　有 51 只小昆虫在一个边长为 1 的小正方形内. 求证：任何时刻必有 3 只昆虫在一个半径为 $\frac{1}{7}$ 的圆内.

证明　将单位正方形分成 25 个边长为$\frac{1}{5}$的小正方形，则必有三只昆虫在其中一个中. 注意到小正方形的外接圆半径为$\frac{\sqrt{2}}{10}<\frac{1}{7}$，从而我们作一个与之同心的半径为$\frac{1}{7}$的圆，则将完全覆盖住此小正方形，即 3 只昆虫位于该圆内.

例 2　证明：从 52 个正整数中，必可找出两数使之和或差可被 100 整除. 对 51 个正整数结论是否成立？

解　考虑 51 个抽屉并依次编号 0，1，…，50. 将以 00 结尾的数放入抽屉 0，将以 01 或 99 结尾的数放入抽屉 1，将以 02 或 98 结尾的数放入抽屉 2，继续下去，直到将以 49 或 51 结尾的数放入抽屉 49，将以 50 结尾的数放入抽屉 50. 在 52 个数中必有一对在同一抽屉里，它们的差（若其末尾相同）或和（其它情况下）以 00 结尾，即可被 100 整除.

在 51 个数中，这样一对在同一抽屉里的数不一定存在，如 1，2，…，49，50，100.

例 3　在 3×4 的矩形中有六个点，证明其中必有两点的距离不超过$\sqrt{5}$.

证明　将 3×4 的矩形分为五部分，如图 20－1，则六点中必有两点落入同一部分，这两点间的距离不超过$\sqrt{5}$.

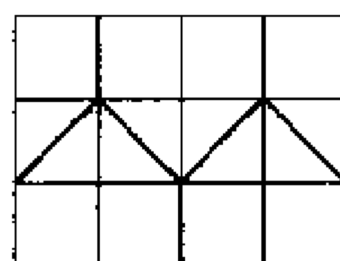


图 20－1

例 4　在 1 至 91 这 91 个自然数中任取 10 个数，证明：其中存在两个数，它们相互的比值 e 满足$\frac{2}{3}\leqslant e\leqslant\frac{3}{2}$.

分析　把一抽屉内两数的比值限制条件作为构造抽屉的出发点：

1 单独占据一个抽屉；

2 与 3 可合放在同一个抽屉里；

4，5，6 放在同一个抽屉里；

7,8,9,10 放在同一个抽屉里;

11,12,13,14,15,16 放在同一个抽屉里;

17,18,…,25 放在同一个抽屉里;

26,27,…,39 放在同一个抽屉里;

40,41,…,60 放在同一个抽屉里;

61,62,…,91 放在同一个抽屉里.

这样一来,共构造了 9 个抽屉,任取 10 个数,必有两数出于同一抽屉,故命题成立.

例 5 设 a,b 是正整数,且 $(a,b)=1$,$b\geqslant 2$,求证:存在正整数 x,y 使得

$$ax-by=1.$$

证明 考虑 $a,2a,\cdots,(b-1)a$ 这 $b-1$ 正整数被 b 除的余数,显见不包含有 0.若余数中也不包含有 1,则存在正整数 p,q,满足 $0<p<q<b$,使 $pa\equiv qa \pmod{b}$,又 $(a,b)=1$,故 $b\mid q-p$,但这与 $0<q-p<b$,矛盾.故存在正整数 x,使得 $ax\equiv 1\pmod{b}$,即存在正整数 x、y 满足 $ax=1+by$,即 $ax-by=1$.

例 6 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个整数(不必互不相同),则总存在其中的部分数或全部数之和可被 n 整除.

证明 考察以下 n 个数:

$$s_1=a_1,s_2=a_1+a_2,\cdots,s_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

若这 n 个数中有被 n 整除的,则问题解决.否则,这 n 个数被 n 除只有 $n-1$ 种余数.故存在 $s_p,s_q(p<q)$ 使 $s_p\equiv s_q\pmod{n}$,从而

$$s_q-s_p=a_{p+1}+\cdots+a_q$$

被 n 整除,结论也成立.

例 7[*] 如图 20-2,如果给每一个小方格染上红色或蓝色.试证明,至少存在一矩形,它的四个角上的小正方形同色.

分析 看起来格子不多,直接验证还是困难的,因为每一方格有两种染色可能,把全部格子染完将有 2^{21} 种可能情形.先考虑第一行,根据抽屉原则至少有四格同色,不妨设为红色.不失一般性,如图 20

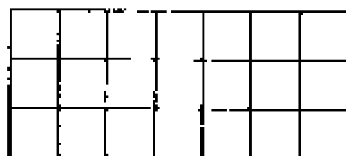


图 20-2

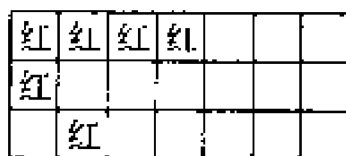


图 20-3

-3,可把第一行左边四格看作染上红色.再看第二、三行左边的四格,若其中有一行中有两格红色,即得四角红色的矩形,否则又如图 20-3,每行左边四格中至多有一格染上红色,从而至少存在两列,第二、三两行四格均染上蓝色,即得四角蓝色的矩形.

例 8 九条直线中的每一条直线都把正方形分成面积比为 2:3 的两个四边形.证明:这九条直线中至少有三条经过同一点.

证明 注意到梯形的面积等于高和中位线的积,可知分正方形成面积比为 2:3 的两个四边形(即梯形或矩形)的每条直线都把正方形的一条对边中点连线分成 2:3.这些直线与正方形两组对边连线的交点只有 4 个.如图 20-4 所示.分正方形的一组对边中点连线的点共有 4 个,而直线有 9 条,根据抽屉原理,至少应有三条直线过这些点中的某一个.

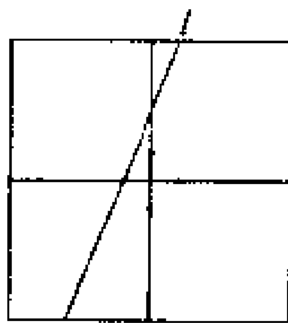


图 20-4

例 9 一个体育代表团共有 997 名运动员,他们着装运动服上的号码数两两不相同,但都小于 1992.证明:至少有一名运动员的号码数恰等于另外两名运动员的号码数之和.

证明 设这 997 名运动员的号码数依小到大排列是 $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{997}$,其中每个数都小于 1992.再作差 $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \cdots, x_{997} - x_1$ 共有 996 个数,它们也都小于 1992,总计共有 1993 个小于 1992 个数.根据抽屉原理,其中必有两数相等,但 $x_i \neq x_j (i \neq j)$,且 $x_i - x_1 \neq x_j - x_1$,故只能是某个号码 x_n 与 $x_k - x_1$ 相等.

当 $n \neq 1$ 时,$x_k = x_1 + x_n$ 表明恰有一运动员号码 x_k 等于另两运动员号码 x_1 与 x_n 之和

当 $n = 1$ 时,即 $x_k - x_1 = x_1$.这时删去 $x_k - x_1$,其余 1992 个数,其值都小于 1992,根据抽屉原理,它们之中仍至少有两个相等,并且只

能是某个号码 x_q 与 $x_p - x_1(p \neq k)$相等. 即 $x_p = x_1 + x_q$. 这时, 可证 $q \neq 1$. 否则 $x_p = x_1 + x_1$, 推出 $x_p = x_k$ 矛盾. 因此, 具有运动员号码 x_p 恰等于另两个运动员运动服号码 x_1 与 x_q 之和.

综上所述, 命题获证.

练 习 二 十

1. 在边长为 1 的正方形内任意放置 5 个点, 求证: 其中至少有两个点, 其距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 设 a, b, c, d 为整数, 则六个差 $b-a, c-a, d-a, c-b, d-b, d-c$ 的乘积可被 12 整除.

3. 空间六点两两相连, 连线段染上红色或蓝色. 证明至少存在一个同色三角形.

4. 已知正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n$, 且 $k > [\frac{n+1}{2}]$. 求证: 存在 a_i, a_r, 使得 $a_i - a_1 = a_r$.

5. 平面上任意给定 6 个点(它们之中无三点共线), 试证明: 总能找到三点, 使得这三点为顶点的三角形的内角中有不超过 30°的角.

6. 证明: 在任意一个九边形中, 必存在两条对角线, 它们之间的夹角小于 7°.

7. 已知平面上有 25 个点, 其中任何一个三点组中总有两点距离小于 1. 求证: 可用一个半径为 1 的圆盖住其中 13 个点.

8. 某班一次数学课上, 老师出了 2 道选择题. 按规定做对得 2 分, 不做得 1 分, 做错得 0 分. 老师说, 可以肯定全班同学中至少有 5 名同学每题得分数都相同. 请回答这班学生至少有多少人?

9. 设有 4×28 个小方格, 给每个小方格都染上红、蓝、黄三种颜色中的一种. 试证明: 至少存在一个矩形, 它的四个角上小正方形同色.

10. 考察所有形如 $x+y\sqrt{2}$的数，其中 x 和 y 都是绝对值不大于 1993 的整数. 证明：在这些数中一定存在一个数 $x_0+y_0\sqrt{2}$，使得 $|x_0+y_0\sqrt{2}|<\frac{3}{1993}$. 其中 x_0,y_0 不全为零.

第二十一讲　操作问题

知识点和方法述要

1. 通常我们讲操作问题主要是指那些给出一个初始状态，然后按照一定的规则操作，要求我们对操作的结果进行探究的问题.这类问题常蕴含着某种不变量或呈现某种规律性，只是这种不变量与规律较隐蔽，发掘出不变量或规律性则如抓住了牛鼻子，也就抓住了解决问题的关键.上述一类问题可看作单人操作问题.

2. 有一类问题是双人操作的问题：A 通常先操作，除此之外，A、B 必须遵循相同的规则，各自探求取胜的策略.此类问题又称双人对策问题.

配对是双人对策中较为常用的致胜策略.在分析问题、探求取胜策略过程中注意灵活运用特殊到一般、逆推等思想方法.

例题精讲

例 1　1995×1995 的方格盘，每个格内已预先染了色，共有两种颜色：红色或白色，允许你进行改色操作，规则是：任选其中一行，把这一行各格的颜色统一描成这一行中色数较多的那种色.对任何一列也可以这么改色，每改完一行或一列的颜色，叫做"操作一次"，问：有限次操作后，能不能使全部方格同色？

解　先对每一列进行这样的"操作"，1995 次操作之后，每列都变成一色了，这时，如果全部方格盘已同色，问题就有了肯定的答案.否则，这时方格盘成为 1995 个同色的竖条，且竖条不全同色.这时再对每一行进行这样的操作.因为每一行有 1995 个格子，是奇数，所以每一行中一定有多数格是一种色，少数格是另一种色.实际上这

1995 行的“结构”是完全一样的. 因此,对每行顺次“操作”之后,所有方格都同色了.

例 2 黑板上写着 2000 个数 1,2,…,2000,每次允许擦去两个数 $a,b(a\geqslant b)$,并写上 $a-b,\sqrt{ab},\sqrt{ab}$ 这三个数,如此进行 8000 次后得到 10000 个数,问:这 10000 数能否小于 500?

解 因为 $a^2+b^2=(a-b)^2+(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{ab})^2$,所以黑板上所有数的平方和是始终不变的. 又一开始时,所有数的平方和为

$$
\begin{aligned}
&1^2+2^2+3^2+\cdots+2000^2\\
&=\frac{1}{6}\times2000\times2001\times4001\\
&>\frac{1}{6}\times2000\times2000\times4000\\
&=2.666\cdots\times10^9>2.5\times10^9=500^2\times10000.
\end{aligned}
$$

故黑板上不能是 10000 个都小于 500 的数.

例 3 有三堆石子的个数分别为 19,8,9. 现在进行如下操作:每次从三堆中的任意两堆中分别取出 1 个石子,然后把这 2 个石子都加到另一堆上去,试问:能否经过若干次这样的操作使得

(1)三堆的石子数分别为 2,12,22;

(2)三堆的石子数均为 12. 如果达到要求,请用最小的操作次数完成它,如不能达到,说明理由.

解 (1)能达到,最少经过六次操作:

$(19,8,9)\to(21,7,8)\to(23,6,7)\to(22,5,9)\to(24,4,8)\to(23,3,10)\to(22,2,12)$.

因为最少一堆从 8 个到 2 个,至少要经过 6 次操作,故不可能比 6 次更少.

(2)不能达到. 由于每次操作后,每堆石子数或者减少,或者加 2,不妨写为

$$(a,b,c)\to(a-1,b-1,c+2),$$

若 a,b,c 被 3 除的余数均不同,则操作后 $a-1,b-1,c+2$ 被

3除的余数也不相同.由于19,8,9被3除的余数依次为1,2,0,而12,12,12被3除的余数为0,0,0.所以不可能.

例4 在$n\times n$的方格盘中,把其中$n-1$个方格染成黑色,其余方格不染色.染完后,允许按下述操作把某些未染色的方格染上黑色,规则是:只要是某个未染色的方格与两个黑色方格相邻(如果两个方格有一条公共边,就称这两个方格相邻),就把这个方格染黑.试问:按这种规则操作下去,能否把整个棋盘全染成黑色.

分析 最初只知道$n-1$个方格是黑色,并不知道它们怎样分布,因此按方格的位置进行论证不方便.

换个角度,考察初始状态以及最后期望的目标状态的差异.开始时$n-1$个黑色方格区的总周长不超过$4(n-1)$,最后n^2个黑色方格区的总周长是$4n$.

每一次染色后,虽然多出一个黑色方格,但是在这次染色前后黑色方格区域的总周长不会增加.也就是说,不论如何染色,原有的不超过$4(n-1)$的总周总长永远不会扩大.这样,不可能达到$4n$.即是说不可能使全部方格都变成黑色.

例5 黑板上写着1~100这100个自然数,甲、乙两人轮流将数字划去,每次每人划去1个,待最后剩下两个时,如果这两个数互质,甲胜;如果不互质,乙胜.问:谁将获胜?

解 这个游戏甲、乙双方谁后划谁将有必胜的方法.

如果甲后划,他可将这100个数字分成50组:(1,2),(3,4),(5,6),…,(99,100),不论乙划去哪个数,甲就划去与之同组的那一个,这样划下去,最后剩下的两个数是同组的,必为相邻的两个自然数,当然是互质的.

如果乙后划,他就只划去奇数,并将3与9这两个奇数尽量保留到最后.如果甲在前48次中划去1个或1个以上奇数,那么乙可将所有剩余的奇数都划去,剩下两个偶数自然不互质;如果甲49次都划去偶数,那么乙前48次可划去除了3与9外的全部奇数,第49次划去剩下的最后1个偶数,剩下两个自然数为3和9,不互质.所以不

管怎样，乙后划也都可以获胜.

例 6 甲、乙两人进行下面的游戏：

两人先约定一个整数 N，然后，由甲开始，轮流把 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 十个数之一填入下面任一个方格中.

每一方格只填一个数字，六个方格都填上数字（数字可重复）后，就形成一个六位数。如果这个六位数能被 N 整除，就算乙胜；如果这个六位数不能被 N 整除，就算甲胜.

如果 N 小于 15，当 N 取哪几个数时，乙能取胜？

分析 N 取偶数，甲可以在最右边方格里填一个数（六位数的个位），就使六位数不能被 N 整除，乙不能获胜. $N=5$，甲可以在六位数的个位填上一个不是 0 或 5 的数，甲就获胜. 上面已经列出乙不能获胜的 N 的取值.

如果 $N=1$，很明显乙必获胜.

如果 $N=3$ 或 9，那么乙在填最后一个数时，总是能把六个数字之和，凑成 3 的整数倍或 9 的整数倍，因此，乙必能获胜.

考虑 $N=7,11,13$，注意到 $1001=7\times11\times13$，乙就有一种必胜的办法：

我们从左往右数这六个格子，把第一与第四、第二与第五、第三与第六配对，甲在一对格子的一格上填某一个数字后，乙就在这一对格子的另一格上填同样的数字，这就保证所填成的六位数能被 1001 整除. 这个六位数，能被 7，11 或 13 整除，乙就能获胜.

综上所述，能使乙获胜的 N 是 1，3，7，9，11，13.

例 7 54 张扑克牌，两个人轮流拿牌，每人每次只能拿 1 张到 4 张，谁拿到最后一张谁输。问先拿牌的人怎样才能保证获胜？

分析 问题在于为确保获胜，先拿牌的人每次拿牌应遵循一个什么样的规则. 设甲先拿. 甲欲获胜，就必须最后给乙剩下 1 张牌. 为达到这个目的，甲在倒数第二次拿后，应给乙剩下多少张牌呢？因为

乙最多能拿 4 张,最少能拿 1 张,所以剩下的牌应为 6 张.这时乙拿 1 张,则甲拿 4 张;若乙拿 2 张,则甲拿 3 张;若乙拿 3 张,则甲拿 2 张;若乙拿 4 张,则甲拿 1 张,总之最后给乙剩下 1 张牌.那么怎样才能给乙留下 6 张牌呢? 由于 $6+5=11$,甲只需在倒数第三次拿牌后给乙剩下 11 张牌就够了.乙若拿 x 张,则甲就拿 $5-x$ 张,这样就给乙剩下了 6 张牌.

通过上述逆推,便可知道,甲欲获胜,则每次留下的牌(按相反顺序排序)依次为:

$$1,6,11,16,21,26,31,36,41,46,51$$

张.可见,甲必须先取 3 张牌(剩下 51 张),然后如果乙拿 x 张,则甲拿 $5-x$ 张,即总使两人每次一共拿 5 张牌.这样乙每次拿牌时面临的张数为

$$51,46,41,36,31,26,21,16,11,6,1.$$

最后乙必败无疑.

例 8 给定一个面积为 1 的三角形 PQR,甲取一点 $X\in PQ$,乙再取一点 $Y\in QR$,甲再又取一点 $Z\in PQ$.甲希望$\triangle XYZ$ 面积尽量大,他能保证的$\triangle XYZ$ 面积最大为多少?

解 如图 21-1,若乙取点 Y 使 $YX/\!/PR$,则

$$\begin{aligned}S_{\triangle XYZ}&=S_{\triangle XYR}\\&=\frac{YR}{QR}S_{\triangle XQR}\\&=\frac{XP}{PQ}\cdot\left(1-\frac{XP}{PQ}\right)\cdot S_{\triangle PQR}\\&\leqslant\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

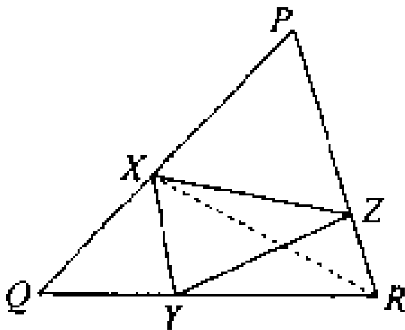


图 21-1

另一方面,若甲取 X、Z 分别是边 PQ、PR 中点,则

$$S_{\triangle XYZ}=\frac{1}{4}$$

综上所述,甲能保证$\triangle XYZ$ 面积最大为$\frac{1}{4}$.

例 9 A 先划去数 $0,1,\cdots,255,256$ 中任 2^7 个，B 再从剩下数中划去任 2^6 个，接着 A 再从剩下数中划去 2^5 个，如此继续下去，直到最后 B 划去 $2^0=1$ 个数.此时剩下两数若为 a,b，B 就付 $|a-b|$ 元给 A. A 怎样才能得到尽可能多的钱？B 怎样才能付尽可能少的钱？如果两人都采用正确的策略，A 能赢多少？

解 以下证明 A 可得到至少 16，B 可使 A 至多得到 16.

A 每次操作划去从左至右第偶数位数，则 A 第 1,2,3,4 次操作后，相邻数的差距分别至少是 2,4,8,16.

B 每次操作划去前面若干数或划去后面若干个数，可使他第 1,2,3,4 次操作后.最大数与最小数的差分别至多是 128,64,32,16.

故在两人都采取正确策略的前提下，A 能赢 16 元.

练 习 二 十 一

1. 在一张长方形或者圆形的桌面上两人轮流放硬币，硬币可以是 5 分的，2 分的或 1 分的，每人每次放一个，硬币之间不能相碰，又不能重叠，轮到某方时，无法再放下硬币者为负，试问：是先放者获胜还是后放者获胜？

2. 今有一张 10×10 的方格表，在中心处的结点上放有一枚棋子，两人轮流移动这枚棋子，即将棋子由所在的结点移到别的结点，但要求每次所移动的距离大于对方刚才所移的距离.如果谁不能再按要求移动棋子，谁即告输.试问：在正确的玩法之下，谁会赢？

3. 一个女孩与一个男孩依次作正二十四边形的对角线，要求所画的对角线互不相交，谁画下最后一条这样的对角线谁就胜，女孩第一个开始画，问：这女孩应该如何画才能得胜？

4. 一堆火柴有 3000 根，甲乙二人轮流取火柴，每次只允许取出 $2^k(k=0,1,2,\cdots)$ 根火柴，由甲先取.谁到最后一根火柴谁胜，问：谁将取胜？

5. 设正整数 n 为奇数，首先在黑板上写数 $1,2,\cdots,2n$，每次操

作擦去任意两个数 a,b,并写上数 $|a-b|$,这样操作下去。试证明最后剩下的数是一个奇数.

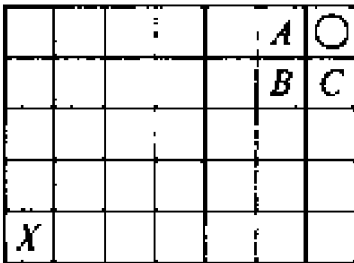
6. 圆周被等分为 6 段弧,将数字,1,0,1,0,0,0 按顺时方向依次写在每段弧上。允许将相邻的两个数同时增加 1。问:是否可能使所有数都变成相等?

7. 一间房子里有若干个人,每人至多认识其中 3 个人,证明:可以让一部分人搬到另一间房子里,使得每个人在自己的房子里至多认识 1 个人.

8. 取下整数 7^{1996} 的首位数字,然后把它加到剩下的数中.这个过程重复进行直到最后得到一个十位数.证明:这个十位数中必有两个相同数字.

9. 在正方形的顶点处放上火柴,开始在某个顶点处放 1 根火柴,其它三个顶点空着,允许我们从某个顶点移走任意根火柴,然后在它的一切相邻顶点处放上火柴,其根数之和等于移走的两倍,是否可以经过若干次这样的操作,使各顶点处的火柴根数(依顺时针向或逆时针方向)为 1,9,8,9?

10. 5×7 的方格棋盘的右上角有一个棋子,甲、乙二人轮番走这个棋子,每人每次走一步,可以向下或向左或向左下方把棋子走入另一个格内.例如,走棋者可以把棋子走向 A、B、C 格之一格(如图).游戏规定,把棋子走入左下角 X 那小方格者是胜利者.问:先走棋者,还是后走棋者有必胜策略?



(第 10 题)

第二十二讲　从特殊性看问题

知识点和方法述要

1. 从特殊性看问题是一个十分重要的数学思想方法，归结起来，可以大致分为运用极端原理看问题和从简单情形看问题.

2. 所谓极端原理，简单地说，就是舍弃繁复的一般情形，直接抓住全体对象的极端情形，或全体对象中具有极端性质的某个对象加以研究，求取问题答案的方法.

3. 老一辈数学家华罗庚教授不止一次地指出："要善于'退'，足够地'退'，'退'到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！"

以简单情形作为考察问题的起点的目的之一是为了从简单情形中寻求启示，再以所获取的启示作为钥匙，打开问题的答案之门. 当我们所遇到的问题较为复杂，而一时无从下手时，常可采取这种方法，先考虑一些较为简单的、易于下手的情形，通过它们摸索出一些经验或对答案作出一些估计与猜想，然后再设法解决问题本身.

以简单情形作为考察问题的起点的另外两个重要作用则是在某种情形下它可以成为通向复杂问题解决的阶梯或为一般情形的解决提供对比.

例题精讲

例 1　已知有 10 张圆纸片，它们盖住的平面图形面积为 1. 证明：可以从中选出若干张互不重叠的圆纸片，使得它们的面积之和不小于$\frac{1}{9}$.

分析　如果这 10 张圆纸片互不重叠，那么问题得到证明. 否则

10张圆纸片彼此有相互重叠的情形.毫无疑问,要挑选合适的圆,首先应考虑最大圆,不妨设其为$\odot O_1$,其半径为r_1.再从极端情形出发,考虑去掉所有与其重叠的圆.设$\odot O_1$及与之重叠的圆盖住的面积S_1,那么

$$S_1 \leqslant \pi(3r_1)^2 = 9\pi r_1^2 \Rightarrow \pi r_1^2 \geqslant \frac{S_1}{9}.$$

若还有剩下的圆纸片,那么剩下的圆纸片都与$\odot O_1$不相重叠,从中再取一个半径最大的圆纸片$\odot O_2$,设其半径为r_2,$\odot O_2$及其与之有重叠的圆纸片所盖住面积为S_2,同样

$$\pi r_2^2 \geqslant \frac{S_2}{9}.$$

因此类推,至多9次,有

$$S_1 + S_2 + \cdots S_k = 1.$$

此时
$$\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \cdots + \pi_k^2 \geqslant \frac{S_1}{9} + \frac{S_2}{9} + \cdots + \frac{S_k}{9} = \frac{1}{9}.$$

这样,我们可挑选$\odot O_1$,$\odot O_2$,$\cdots$,$\odot O_k$,它们面积和不小于$\frac{1}{9}$,且彼此不重叠.

本例说明,在不改变问题实质的前提下,将通常不引人注目的极端情形明确化、加入到解决问题的条件行列中去,可以起到举足轻重的作用,这正是极端原理的一大可贵之处.

例2 若干人聚会,其中某些人彼此认识.已知如果某两人在聚会者中有相同数目的熟人,则他俩便没有共同的熟人.证明,若聚会者中有人至少有1992个熟人,则必然也有人恰好有1992个熟人.

证明 考虑(聚会者中)熟人最多的某个人(如这样的人不止一个,则任取其中一个),记为A,设A共认识n个人,这些熟人为B_1,B_2,$\cdots$,B_n.由于B_1,B_2,$\cdots$,B_n中任两人B_i与B_j都认识A,即A是他俩的共同熟人,依题设B_i与B_j的熟人数目不等.此外,B_1,B_2,$\cdots$,B_n的熟人数目均不会超过n,于是他们的熟人数目恰好为1,2,$\cdots$,n.因有人至少认识1992个人,这意味着$n \geqslant 1992$,故数1992在上述

数列中出现，于是 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 中，有人恰好有 1992 个熟人.

例 3 沿着一条环形公路分布着一些加油站，现知各站的储油总量刚好够一辆汽车环行一周，但每一站的储油量未必够它到达一站．如果汽车每到一站便将该站的储油全都捎上，证明：汽车一定可从某个储油站出发，利用这些油环行一周后回到出发点。

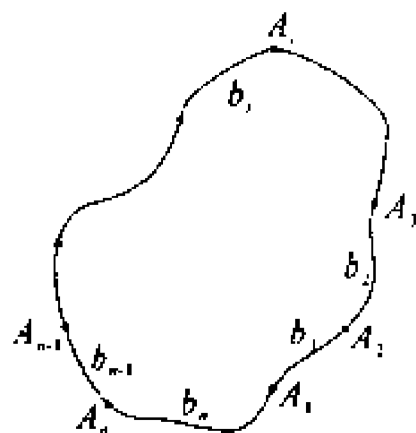


图 22－1

分析 如图 22－1，假定汽车循逆时针方向环行（对循顺时针方向可作类似考虑），将这些储油站记有 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，并设它们按逆时针方向依次布列在环状公路上，将 A_i 的储油量与汽车由该站到达下一站所需油量之差记作 b_i，于是就有 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$. 现自 b_1 起，逐个累加这些差数，得到累计数 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 如下：

$$B_1=b_1,$$

$$B_2=b_1+b_2,$$

$$\cdots$$

$$B_i=b_1+b_2+\cdots+b_i,$$

$$\cdots$$

$$B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=0.$$

设 B_{i_0} 是这些累计数中的最小值，则有 $B_{i_0} \leqslant B_n=0$. 如果 $B_{i_0}=0$，则说明汽车自 A_1 出发，即可利用这些油，逆时针环行一周．如果 $B_{i_0}<0$，那么汽车就应当自 A_{i_0} 出发环行．因为由 B_{i0} 的最小性，不难验证，自 A_{i_0} 开始所作 b_i 的累加的结果都非负．从而说明汽车可以利用这些油，自 A_{i_0} 出发逆顺针环行一周后回到 A_{i_0}.

例 4 平面上有 n 个点，连接其中任意两点的直线都含有其中另一个点．证明这 n 个点共线.

证明 假设所有的点不共线．过所有的点对作直线，并考虑所有的点与所作直线之间非零距离．因为这些距离只有有限多个，所以至

少有一点 A 与一条直线 ℓ,使得它们之间距离最小,在直线 ℓ 上作垂线 AH(如图 22-2),由于直线 ℓ 至少含有给定的点中的三个点,所以总有两个点,它们在直线 ℓ 上点 H 的同侧,设它们是点 B 与点 C,且点 B 介于点 H 与 C 之间,其中不排斥 B 与 H 重合的情形. 于是,如果 BK 与 HM 垂直于直线 AC,则 $\triangle BKC \backsim \triangle HMC$,显见 M 与 A 不同,故

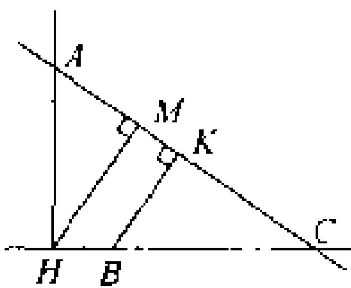


图 22-2

$$BK = \frac{HM \cdot BC}{HC} \leqslant HM \leqslant HA.$$

即点 A 到直线 ℓ 的距离并不是最小的,矛盾. 命题获证.

例 5 在同一平面上,有点 A 和点 P,一个人从点 P 开始,向 A 直线前进,到达点 A 后,向左拐 90°. 继续直线前进. 走同样长的距离达到一点 P_1,这样,我们说这个人完成了一次关于点 A 的左转弯运动.

平面上四个点 A、B、C、D 是一正方形的四个顶点,另一点 P 距离点 D 10 公里,如图 22-3. 一个人从点 P 出发,先关于点 A 作左转弯运动,到达一点 P_1,接着从点 P_1 出发关于点 B 作左转弯运动到达一点 P_2,然后依次关于点 C、D、A、B…连续地作左转弯运动. 作过 11111 次左转弯运动后,到达点 Q,向 Q 距离出发点 P 有多少公里?

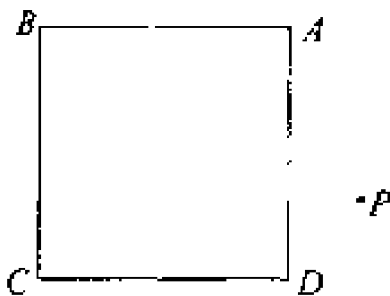


图 22-3

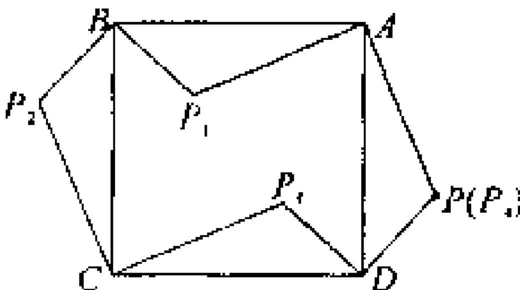


图 22-4

分析 我们可以作出从 P 开始的第 1 次,第 2 次,第 3 次,第 4 次左转弯运动图形,如图 22-4,至此发现,此人回到了原地,即 P_4 与 P 重合. 事实上易得

$$\triangle APD \cong \triangle BP_1A \cong \triangle BP_2C \cong \triangle DP_3C \cong \triangle DP_4A.$$

这说明，无论从哪一点出发，对 A、B、C、D 作四次 $90°$左转弯运动后，就又回到了原地. 这样循环往复，因 $11111 \equiv 3 \pmod 4$，故 $P_{11111} = P_3$，则

$$PP_3 = \sqrt{\overline{DP_3}^2 + \overline{DP}^2} = \sqrt{2}\overline{DP}.$$

因 $DP = 10$ 公里，故 $PP_3 = 10\sqrt{2}$公里. 即为所求.

以上通过对最初最简单情形枚举，从而归纳出周期性重复规律，问题得到解决.

例 6 证明：具有下列形式

$$N = \underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}5$$

的数是完全平方数.

分析 一般包含在特殊之中. 为确定 N 的一般形式，可先考察最简单情形：

$$n = 1 \text{ 时}, N = 5^2;$$
$$n = 2 \text{ 时}, N = 35^2;$$
$$n = 3 \text{ 时}, N = 335^2;$$
$$n = 4 \text{ 时}, N = 3335^2;$$

至此，猜想 $$N = \underbrace{33\cdots3}_{(n-1)}5^2 = \left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2.$$

这是我们进一步论证的着眼点.

$$\begin{aligned}
N &= \underbrace{111\cdots1}_{(n-1)\text{个}}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}}5 \\
&= 10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^{n+1} + 2\cdot10^n + 2\cdot10^{n-1} + \cdots \\
&\quad + 2\cdot10 + 5 \\
&= 10^n(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10) + 2(10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10) + 5 \\
&= 10^n\cdot\frac{10}{9}(10^{n-1} - 1) + 2\cdot\frac{10}{9}(10^{n-1} - 1) + 5 \\
&= \frac{1}{9}(10^{2n} + 2\cdot10^n + 5)
\end{aligned}$$

$=(\frac{10^n+5}{3})^2$.

由于 10^n+5 各位数字之和为 6,故 $3\mid 10^n+5$. N 为完全平方数.

例 7 试把 1987 表成若干正整数的和,使这些正整数的积最大.

分析 把 1987 表成若干正整数的和的情形很多,直接一一列举是难以实行的,还是回到最简单的情形进行考察.

数 2:只能表成 $1+1$,但 $1\times1<2$,这说明不如不变.看来从原来的数中分出 1 是不合算的,这种情形不再予以考虑;

数 3:不如不变;

数 4:表成 $2+2$,因 $2\times2=4$,故变与不变无区别;

数 5:表成 $2+3$,因 $2\times3=6>5$,故积的最大值是 6;

数 6:表成 $3+3$,则 $3\times3=9$,

表成 $2+4$,则 $2\times4=8$,

表成 $2+2+2$,则 $2\times2\times2=8$.

后二种情形可归结为一种情形,积的最大值是 9,可看出表成 3 个 2 的和不如表成两个 3 的和.

数 7:表成 $2+5$,5 应继续表为 $3+2$,可见积的最大值是 $3\times2^2=12$;

数 8:表成 $2+6$,$3+5$.应将 6、5 继续表成若干 2 与 3 的和.此外交 8 表成 $4+4$ 也可继续表成若干 2 的和;

经过以上枚举,可以猜想到:欲得所求,应该把该整数表成若干个 2 或 3 的和.以下转为一般性论证.

首先把 1987 表成若干正整数的和,欲使积最大,这些加数均不超过 4.否则不妨设存在一加数 x,$x>4$.那么把 x 表成 $2+(x-2)$.

$$2\cdot(x-2)=2x-4=x+(x-4)>x$$

积将增大.

其次我们可将 4 表成二个 2 的和,且应将三个 2 的和表成二个 3 的和,即加数中的 2 的个数不宜超过 2 个.

因此,应将 1987 表成 661 个 3 和二个 2 的和,所求积的最大值为

$4\cdot 3^{661}$.

上述结论可推广到任意大于 1 的自然数 N. 即当 $N=3m$(m 为正整数)时,所求积的最大值为 3^m;$N=3m+1$(m 为正整数时),所求积的最大值为 $4\cdot 3^{m-1}$;$N=3m+2$(m 为零或正整数)时,所求积的最大值为 $2\cdot 3^m$.

例 8 某足球邀请赛有十六个城市参加. 每市派出甲、乙两个队. 根据比赛规则,每两队之间至多赛一场,并且同城市的两个队之间不进行比赛. 比赛若干场后进行统计,发现除 A 市甲队外,其它各队已比赛过的场数各不相同,问 A 市乙队已赛过多少场?

分析 凭经验猜想,结论应发生在某一特殊请形. 如 A 市乙队是各队中比赛场数最多或最少的队,或者不多不少. 这种内在规律如何揭示呢"我们可以在不改变问题实质的前提下将问题特殊化. 先假设仅有 A、B 两城市四队参加比赛. 分别记作 A_1、A_2、B_1、B_2. 其中足标为 1 的表示甲队,足标为 2 的表示乙队. 并设赛过 k 场的队为 $T(k)$($k=0,1,2$). 那么 $T(2)$只能发生在 B_1、B_2. 不妨设为 B_1. 显然应有下面的对应关系:

$$\begin{array}{ccc} T(2) & T(1) & T(0) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B_1 & A_2 & B_2 \end{array}$$

这是因为 B_1 与 A_1、A_2 都赛过,惟一没有参赛的队只能是 B_2,这里 $T(2)$、$T(0)$应是同一城市的两队,再看三个城市六个队参加比赛. 分别记作 A_i,B_i,C_i($i=1,2$),赛过 k 场的队记作 $T(k)$,($k=0,1,2,3,4$). 那么 $T(4)$只能发生在 B_1, C_1,不妨设为 B_1. 同样 A_i、C_i 都与 B_1 比赛过,只能是 B_2 没有参加比赛,即为 $T(0)$. 现剩下四队都至少赛过一场,将这些队的比赛场数都减少一场,即除去与 B_1 比赛的那场球,问题可归化到前面所述的二城市四队比赛情形,可知 A 市乙队共赛过 2 场,正好不多不少.

现在回到原问题上来,解答唾手可得. 由于共有 32 个队,根据比赛规则,同一城市的两个队之间不比赛,因此每队至多赛 30 场.

又由题设，除 A 市甲队外，其余 31 个队比赛过的场数各不相同，因此这些队比赛场数分别为 0,1,2,…,30 场.

现设赛过 k 场的队为 $T(k)$ 队($k=0,1,2,\cdots,30$). 首先考察 $T(30)$ 队. 由于它已赛过 30 场，因此其他城市的每一个队都已和它比赛过，而只有 $T(0)$ 队未和 $T(30)$ 队比赛，于是 $T(30)$ 队和 $T(0)$ 队必为同一城市的队.

其次考察 $T(29)$ 队，除 $T(0)$ 队及与 $T(29)$ 队同一城市的另一队外，显然 $T(29)$ 队与其他各队都比赛过. 而 $T(1)$ 队则相反，除与 $T(30)$ 队比赛过外，再未赛过一场，故 $T(1)$ 队与 $T(29)$ 队为同一城市两队.

同理可得 $T(28)$ 与 $T(2)$，$T(27)$ 与 $T(3)$，…，$T(16)$ 与 $T(14)$ 均为同一城市的两队，所以 $T(0)$，$T(1)$，…，$T(13)$，$T(14)$，$T(16)$，$T(17)$，…，$T(29)$，$T(30)$ 等各队都不是 A 市乙队，故 A 市乙队只能是 $T(15)$ 队，即这个队赛过 15 场.

例 9 证明：任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+2\sqrt{2}$.

分析 将凸四边形的周长和对角线放在一起考虑，令人棘手. 能否将两者分开考虑、各算各的账呢？需要分开，又怎么分？为了做到心中有数，还是先来考察一下面积为 1 的正方形和菱形吧！

在正方形中，恰好是周长等于 4，对角线之和为 $2\sqrt{2}$.

在菱形中，记两对角线的长分别为 ℓ_1,ℓ_2，则 $S_{菱形}=\frac{1}{2}\ell_1\ell_2=1$. 于是

$$\ell_1+\ell_2=\sqrt{(\ell_1+\ell_2)^2}=\sqrt{(\ell_1-\ell_2)^2+4\ell_1\ell_2}\geqslant 2\sqrt{\ell_1\ell_2}=2\sqrt{2},$$

菱形的周长为

$$4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\ell_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}\ell_2\right)^2}=2\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2}=2\sqrt{(\ell_1-\ell_2)^2+2\ell_1\ell_2}\geqslant 2\sqrt{2\ell_1\ell_2}=4.$$

以上分析表明对于正方形和菱形这两种最简单的凸四边形可将

周长和对角线分开考虑.看来,分开考虑不失为一种好想法,而且这些简单情形还给我们下一步如何分开处理提供了启示.

设四边形 $ABCD$ 是一个面积为 1 的凸四边形,对角线相交于 O, $AO=e$, $BO=h$, $CO=f$, $DO=g$,如图 22-5,则

$$
\begin{aligned}
S_{\text{四边形}ABCD} &\leqslant \frac{1}{2}(eh+hf+fg+ge)\\
&=\frac{1}{2}(e+f)(h+g)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{(e+f)(h+g)}{2}\right]^2\\
&=\frac{1}{8}(AC+BD)^2,
\end{aligned}
$$

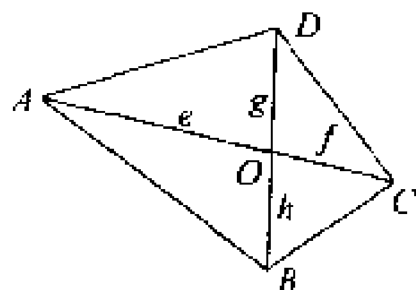


图 22-5

故 $AC+BD\geqslant 2\sqrt{2}$.即四边形 $ABCD$ 对角线长不小于 $2\sqrt{2}$.

设四边形 $ABCD$ 的各边长顺次分别为 a,b,c,d,则

$$S_{\text{四边形}ABCD}\leqslant \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd,$$

$$S_{\text{四边形}ABCD}\leqslant \frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}bc.$$

两式相加,得

$$
\begin{aligned}
2=2S_{\text{四边形}ABCD} &\leqslant \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}cd+\frac{1}{2}ad+\frac{1}{2}bc\\
&=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[\frac{(a+c)(b+d)}{2}\right]^2\\
&=\frac{1}{8}(a+b+c+d)^2.
\end{aligned}
$$

故四边形 $ABCD$ 的周长不小于 4.

综上所述,命题即可获证.

练习二十二

1. 证明下面一列数:

$729, 71289, 7112889, 711128889, \cdots, 7\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)个1}2\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)个8}9$ 中每一项都是一个完全平方数.

2. 求出所有这样的正整数,它等于其所有正因数的个数的平方.

3. 平面上给定 n 个点,将连接每两点的线段中点染成红色. 证明:至少有 $2n-3$ 个红点.

4. 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_1^2, \\ x_4 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

其中 $x_i(i=1,2,\cdots,4)$ 为正数.

5. 在 $n\times n$ 的国际象棋盘上放有一些车,它们满足如下条件. 如果方格 (i,j) 是空的,那么第 i 行和第 j 列的车的个数之和不小于 n. 证明棋盘上至少有 $\frac{n^2}{2}$ 个车.

6. 在毕业舞会上,每一个小伙子至少和一个姑娘跳舞,但任何一个小伙子都没有和所有的姑娘跳舞;而每一个姑娘至少和一个小伙子跳舞,但任何一个姑娘都没有和所有的小伙子跳舞. 证明:在所有参加舞会的人中,可以找到这样两个小伙子和两个姑娘,这两个小伙子中的每一个只和这两个姑娘中的一个跳过舞,而这两个姑娘中的每一个只和这两个小伙子中的一个跳过舞.

7. 有 100 张的一摞卡片,现从最上面的一张开始按如下的顺序进行操作:把最上面的第一张卡片舍去,把下一张卡片放在这摞卡片的最下面. 再把原来的第三张卡片舍去,把下一张卡片放在最下面. 反复这样做,直到手中只剩下一张卡片,那么剩下的这张卡片是原来那一摞卡片的第几张?

8. 若要用天平称出 1 克,2 克,3 克,$\cdots$,40 克这些不同的整数总

重量，天平两边都允许放砝码，问至少要用多少个砝码？这些砝码的重量分别是多少？

9. 点 M、N 是以定长线段 AB 为直径的半圆上的两个定点，试证明：不论点 P 在直径上移动到何处，$\tan\angle AMP \cdot \tan\angle BNP$ 为定值.

10. 证明：不存在四个正整数 x,y,z,u，满足方程

$$x^2+y^2=3(z^2+u^2).$$

第二十三讲　换个角度看问题

知识点和方法述要

1. 当一个问题正面难于解决时，可改变角度考虑问题的反面. 作为一个论证问题，则考虑使用反证法.

所谓“反证法”就是从命题的结论的反面入手，先假设结论的反面成立，通过一系列正确的逻辑推理，导出与已知条件、已知公理、定理、定义之一相矛盾的结果或两个互相矛盾的结果，从而达到证明结论正面成立的目的的思想方法. 作出正确的反设，是使用反证法的一大关键，分清命题的条件与结论、结论与反设间的关系是运用反证法的前提.

有些问题按照题目中所叙述过程的相反顺序来思考问题，即进行逆推可收到意想不到的效果.

2. 有不少问题的解决若始终依赖于对问题提供的明显的局部的情境与条件的研究和探索上是不够的. 恰恰相反，为了问题的解决，我们必须从整体出发作出通盘考虑，要在整体的统领下对局部进行观察、分析、探索，从不同角度进行研究，利用对所研究对象的整体性的认识达到问题的解决.

3. 将所研究的对象与我们熟知、易于把握性质的对象建立某种特殊的对应关系，从而导致问题的解决，是我们改变角度看问题的一种重要方式，是--种重要思想方法。数形结合、用图象、表格等方式研究有关数的问题则是这种方法运用的一个重要侧面.

4. 解决某些情形较为复杂的问题，可分走走，先进行分类，就某些简单情形作出分析、导致结论，再由简单情形提供对比和获取其他繁复情形解决的思路.

例 题 精 讲

例 1 求证：如果 4 个圆两两互相外切，则必有一个圆的圆心在其他 3 个圆圆心连线所确定的三角形内部.

分析 正面难以展开，考虑从反面入手. 如图 23-1，设 4 个圆的圆心为 A、B、C、D，半径长分别为 a, b, c, d，且 A、B、C、D 中任一点均不在其他 3 点所确定的圆内，则四边形 $ABCD$ 为凸四边形. 依题设，有

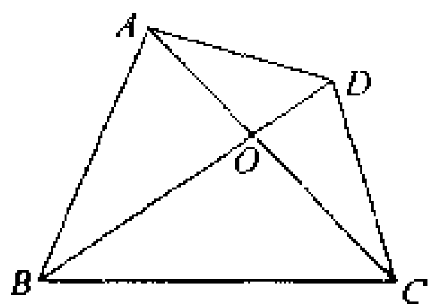


图 23-1

$$\begin{aligned}&AB+BC+CD+DA\\=&(a+b)+(b+c)+(c+d)+(d+a)\\=&2(a+b+c+d)\\=&2(AC+BD). \quad ①\end{aligned}$$

又设 AC 与 BD 相交于 O，有

$$\begin{aligned}&2(AC+BD)\\=&2(AO+CO+BO+DO)\\=&(AO+BO)+(BO+CO)+(CO+DO)+(DO+AO)\\>&AB+BC+CD+DA. \quad ②\end{aligned}$$

①与②矛盾. 故 A、B、C、D 中必有一点在其他三点所确定的三角形内，即一个圆两两外切时，必有一圆和圆心在其他 3 个圆圆心线所确定的三角形内部.

例 2 在平面上给出了 5 个点，已知其中任意 4 点中都有某 3 个点构成一个正三角形。证明，这 5 个点中必有某 4 个点构成一个有一个角是 $60°$的菱形。

分析 如果存在两点的连线段同时是两个不同的正三角形的边，则题设要求的菱形存在. 因此，我们只要能确定这样的两点存在，问题即可得以解决.

现从反面考虑——反面情形较正面情形简单些，设任何两点的

连线都至多是一个正三角形的边.如图 23-2,设 $\triangle ABC$ 是正三角形,则在 B、C、D、E 中,不能有以 BC 为边的正三角形,从而其中的正三角形只能是 $\triangle CDE$ 或 $\triangle BDE$.不妨设为 $\triangle CDE$.这样一来,在 A、B、D、E 中,既不存在以 AB 为边的正三角形,也不存在以 DE 为边的正三角形,从而就不会有正三角形了.矛盾.

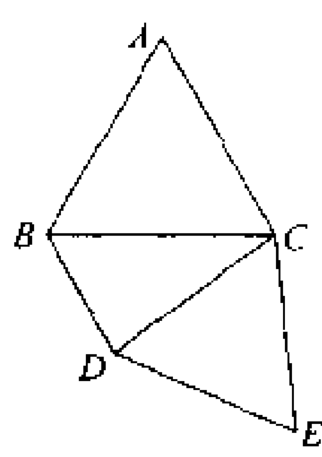


图 23-2

例 3　一次汽车拉力赛在沙漠中走 6 天,而每辆汽车只能带 4 天的汽油.为使一辆汽车穿越沙漠必须有其他汽车为它途中加油,但这些汽车也不能因缺油而被迫停在沙漠中。请问至少要几辆汽车才能帮助一辆汽车越过沙漠?请设计一个可行的方案.

分析　设穿过沙漠的汽车为甲车,它从点 A 出发,6 天后到达点 B(如图 23-3).汽油的供给至少要保证刚好能够甲车到达点 B.为此,从图 23-3 中可看出,甲车在点 C 须有 4 天的汽油.注意到甲车从点 A 出发到达点 C 已花掉了 2 天,用去了一半汽油.因而必须另有一辆车乙在点 C 处给甲车加上 2 天的汽油.但乙车还须返回,又须有一辆汽车丙为汽车乙加油.由于乙要 2 天的汽油,丙往返只能用 2 天的时间,这样丙至多只能开到点 D(花一天时间).事实上,不难看出,如上所述甲、乙、丙从点 A 同时出发,乙、丙两车可帮助甲车刚好越过沙漠.

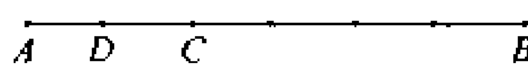


图 23-3

例 4　两个初三学生被允许参加高中学生所举行的象棋比赛.每个选手都同其他每个选手比赛一次,胜得一分,和得半分,输得零分.两个初三学生共得 8 分,每个高中学生都和高中其他同学得到同样分数,试问有几名高中学生参赛?

解　设有 n 名高中学生参赛,每人得 k 分,则所有学生共得$(kn+8)$分,又比赛总盘数为$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$,累计$\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$分.

故

$$kn+8=\frac{1}{\ }(n+2)(n+3),$$

即

$$n^2-(2k-3)n-14=0.$$

根据韦达定理,应有 $n\mid 14$,因此 n 只可能是 1,2,7,14. 但 $n=1,2$ 时,$k<0$,不可能. 当 $n=7$ 时,$k=4$;$n=14$,$k=8$. 故参赛的高中学生有 7 人或 14 人.

例 5 依次拼接 2001 个相同的正方形(拼接时,一个正方形的边与另一个正方形的边相合). 问:能否拼成一个封闭的链?

分析 假若能按要求将这些正方形拼接成链,则两相邻正方形的边在互相平行或互相垂直的直线上. 我们在些直线上取一个方向为向上及向右,对应的相反方向则为向下或向左. 现从任意一个正方形的中心出发,向着邻近的正方形的中心移动,然后从它向另一邻近正方形的中心移动,以此类推,直到最后回到原来的正方形. 设其中有 a 步向上,b 步向下,c 步向左,d 步向右. 从整体上看,2001 个正方形拼成一条封闭的链,故

$$a+b+c+d=2001.$$

又相反方向的步数应相同,故 $a=b$,$c=d$,因此

$$2(a+c)=2001,$$

矛盾. 回答应是否定的,即不能按题设要求拼成一条封闭的链.

例 6 能否把 1,1,2,2,3,3,…,1986,1986 这些数排成一行,使得两个 1 之间夹若一个数,两个 2 之间夹着两个数,…,两个 1986 之间夹着一个一千九百八十六个数? 请证明你的结论.

解 假设能将上述 2×1986 个数排成一行满足题设要求. 这时每个数 $i(1\leqslant i\leqslant1986)$ 可用一对有序实数 (x_i,y_i) 与之对应,这里 x_i 是 i 第一次出现时的位置的序号,y_i 是 i 第二次出现时位置的序号,显然

$$y_i=x_i+i+1\qquad(1\leqslant i\leqslant1986).$$

若不考虑某个具体对象,从整体上看,所有数对的和为

$$
\begin{aligned}
&1+2+\cdots+2\times1986\\
=&\frac{1}{2}\times2\times1986(2\times1986+1)\\
=&1986(2\times1986+1),
\end{aligned}
$$

是一个偶数;另一方面,就某一个 i 而言,它的两坐标之和为

$$x_i+y_i=2x_i+i+1.$$

因此,所有不同实数对 i 和为

$$
\begin{aligned}
&2(1+2+\cdots+1986)+(1+2+\cdots+1986)+1\times1986\\
=&3\times\frac{1}{2}\times1986\times(1986+1)+1986\\
=&3\times993\times1987+1986
\end{aligned}
$$

是一个奇数.矛盾!

结论是否定的,即不能将这些数按要求排成一行.

例 7 甲、乙、丙三个盘子里分别盛着 6 个苹果,小培按下面的办法搬动了 5 次:

第一次,甲盘不动,把 1 个苹果从一只盘子里搬到另一只盘子里去;

第二次,乙盘不动,把 2 个苹果从一只盘子里搬到另一只盘子里去;

第三次,丙盘不动,把 3 个苹果从一只盘子里搬到另一只盘子里去;

第四次,甲盘不动,把 4 个苹果从一只盘子里搬到另一只盘子里去;

第五次,乙盘不动,把 5 个苹果从一只盘子里搬到另一只盘子里去。

最后发现每只盘子里仍然是 6 个苹果.你知道他是怎样搬动的吗?

分析 关键在于确定每次搬动是从哪一个盘子里搬到哪一个盘子里.这需要从总体上考虑.第一次搬动,甲盘中苹果数目不变,乙、丙两盘中一个盘多了一个苹果,一个盘少了一个苹果,即一个盘中苹

果数增加 1,另一个盘中苹果数减少 1. 第二次搬动,乙盘苹果数目不变,甲、丙两盘,有一盘中苹果数增加 2,另一盘中苹果数减少 2. 第三、第四、第五次搬动时,有类似的结果. 我们先列一个表,把要加减的数目填上去.

	甲	乙	丙
第 1 次	0	1	1
第 2 次	2	0	2
第 3 次	3	3	0
第 4 次	0	4	4
第 5 次	5	0	5

要在每一个非零数目前添上"+"或"-",表示增加与减少,使得每一行最终的和为零,用以表明不增加也不减少. 又由于 5 次搬动后各盘苹果数目没变,所以各列的和也应为零. 这样一来有且仅有两种不同情形,如图表(1)、(2),从表中也就不难知道应如何搬动这些苹果了.

	甲	乙	丙	
第一次	0	-1	+1	
第二次	+2	0	-2	
第三次	+3	-3	0	
第四次	0	+4	-4	
第五次	-5	0	+5	

(1)

	甲	乙	丙	
第一次	0	+1	-1	
第二次	-2	0	+2	
第三次	-3	+3	0	
第四次	0	-4	+4	
第五次	+5	0	-5	

(2)

例 8 这是上世纪法国数学家柳卡提出的一个问题. 在一次国际会议期间,一天,当来自各国的许多著名数学家出席的晨宴快结束的时候,柳卡突然向在场的人们提出了这个被他趣称为最困难的题目:假定某轮船公司较长时间以来,每天中午有一只轮船从哈佛开往

纽约，并且在每天的同一时间也有一只轮船从纽约开往哈佛. 轮船在途中所花的时间，来去都是七昼夜. 问今天中午从哈佛开出的轮船，在整个船运途中，将会遇到几只同一公司的轮船从对面开来?

分析 如不仔细思考，可能误认为仅遇到 7 只轮船，犯这个错误的原因，主要是只考虑了今天中午以后开出的轮船而忽视了已在海上的轮船. 以下我们采用图解的方法. 首先如图 23－4，我们用带箭头的斜线代表今天中午从哈佛出发经七昼夜到达纽约的路线.

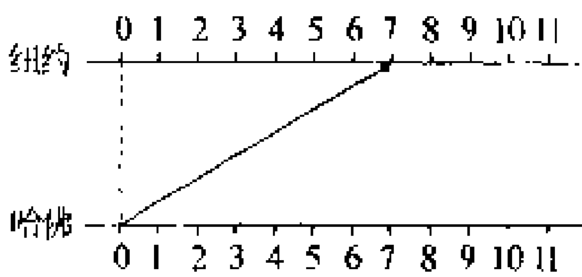


图 23－4

在图 23－4 的基础上，类似地再适当添上公司其他轮船行驶路线，如图 23－5，代表今天中午从哈佛开往纽约的轮船的带箭头的线段，与另一簇代表从纽约开往哈佛的轮船行驶路线的 15 条平行线段相交，这表明它将遇到 15 只轮船，其中一只是在出发时遇到的(从纽约刚到哈佛)，1 只是到达纽约时遇到的(刚好从纽约开出)，剩下 13 只则在海上相遇.

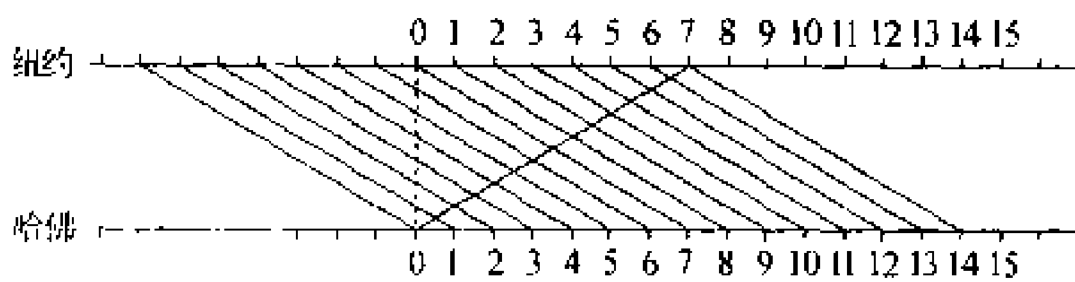


图 23－5

例 9 设 $n\geqslant4$ 为正整数。证明：每个有外接圆的四边形，都可以分成 n 个都有外接圆的四边形.

分析 一种十分简单的情形是每一个等腰梯形都有一个外接圆. 我们可尝试以此为解答问题的出发点.

(i)若原来的四边形就是等腰梯形，那么只要用平行于底边的平行线段将其分为 n 个等腰梯形，即可保证它们都有外接圆.

(ii)若原来的四边形 $ABCD$ 不是等腰梯形，如图 23－6，有

$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$.

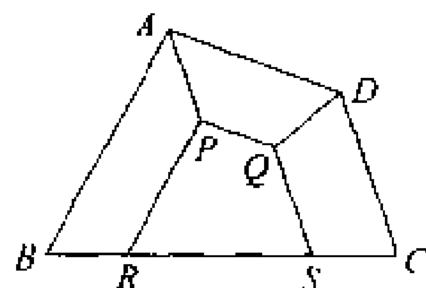


图 23－6

不妨设$\angle A \geqslant \angle C$，$\angle D \geqslant \angle B$，那么$\angle A$、$\angle D$为非锐角，$\angle B$、$\angle C$为非钝角，则$\angle A \geqslant \angle B$，$\angle D \geqslant \angle C$．于是，可作$\angle BAP = B$，$\angle CDQ = \angle C$，且使 P、Q 均在四边形 $ABCD$ 内部，$PQ /\!/ AD$，再作 $PR /\!/ AB$，$QS /\!/ DC$，分别交 BC 于 R、S，即得四边形 $ABRP$ 和四边形 $CDQS$ 为等腰梯形．由

$$\angle PAD = \angle A - \angle B = \angle D - \angle C = \angle QDA,$$

知四边形 $PQDA$ 也是等腰梯形．又

$$\angle SQP + \angle SRP = \angle D + \angle B = 180^\circ,$$

知四边形 $RSQP$ 有外接圆．这样，我们便将四边形 $ABCD$ 分成了 4 个都有外接圆的四边形，其中有 3 个还是等腰梯形，然后再如（ⅰ），将其中一个等腰梯形分成 $n-3$ 个等腰梯形即可．

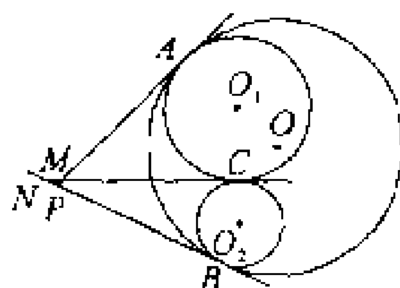
练 习 二 十 三

1．下表中，第一行有 6 个数，第一列有 5 个数，其他位置上的每个数都是它所在行的第一列上的数与所在列的第一行上数的积，比如表中"＊"位上的数是 $12 \times 11 = 132$，"△"位上的数是 $14 \times 3 = 42$．求表中除第一行和第一列外其他的数的和．

	9	11	7	15	3	19
8						
12		＊				
14					△	
10						
20						

2. 已知 $x\neq\frac{1}{y}$，$3x^2+4x-1=0$，且 $\frac{3}{y^2}+\frac{4}{y}=1$，求 $y+\frac{1}{x}$ 的值.

3. 如图，圆 O_1、圆 O_2 外切于点 C，且分别内切圆 O 于点 A、B. 圆 O 在 A、B 点的切线相交于 P，求证：圆 O_1、圆 O_2 的内公切线也过点 P.

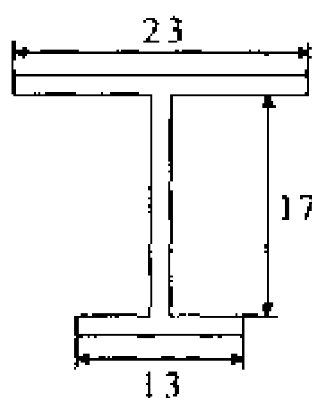


（第 3 题）

4. p_1，p_2 为质数. 证明：关于 x，y 的方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p_1p_2}$（$p_1\neq p_2$）无正整数解.

5. 已知 25×25 的正方形，它由 625 个单位小方格组成. 在每个小方格中任意填入 $+1$ 或 -1. 记第 i 行 25 个数之积为 a_i，第 j 列 25 个数之积为 b_j，证明：无论 $+1$ 和 -1 怎样填，$a_1+a_2+\cdots+a_{25}+b_1+\cdots+b_{25}\neq0$.

6. 某商店需要制作如图所示的工字形架 100 个，每个由铝合金型材长为 2.3 米，1.7 米，1.3 米各一根组装而成. 市场上可购得该铝合金材的原材料长为 6.3 米，问至少要买回多少根原材料，才能满足要求（不计损耗）？



（第 6 题）

7. 对于一个参观图，规定：（ⅰ）若去 A 地，也必须去 B 地；（ⅱ）D、E 两地至少去一地；（ⅲ）B、C 两地只去一地；（ⅳ）C、D 两地都去或都不去；（Ⅴ）若去 E 地，A、D 两地也必须去.

请你说明理由，该参观团最多能去哪几个地方？

8. 九只兵组成 3×3 的正方形，放在 8×8 的棋盘的左下角. 每只兵可以跳过他身边的另一只兵到一个空着的方格，即可以关于它的邻格的中心作对称运动（可以横跳、竖跳或沿着斜线跳）. 要求这些兵跳到棋盘的另一个角（另一个 3×3 的正方形），如果是

(1)左上角；

(2)右上角.

这一要求能否实现？

9. 将正三角形 ABC 的每一条边 n 等分，过各分点作其他两边的平行线，这些平行线构成 n^2 个小正三角形，每一个的边长是 $\triangle ABC$ 的 $\frac{1}{n}$，将它们的顶点染上红、蓝、白三种颜色中之一，并且 AB 上的点不染红色，BC 上的点不染蓝色，CA 上的点不染白色．证明一定有一个小正三角形，它的三个顶点颜色不同．

10. 用任意的方式给平面上的每一个点染上黑色或白色。证明：一定存在一个边长为 1 或 $\sqrt{3}$ 的正三角形，它的 3 个顶点是同色的．

练习解答

练习一

一、填空题

1.将 $x=-1$ 代入方程左边，有

$$a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c=0.$$

故方程必有实数根 -1.

2.因 m 是方程的根，故 $am^2+bm+a=0$. 显见 $m\neq0$，由上式可得 $a+b\cdot\frac{1}{m}+a\cdot(\frac{1}{m})^2=0$，这表明 $\frac{1}{m}$ 是方程的另一个根.

3.原方程可配方得

$$(x+m+1)^2+(m-1)^2+(m+2n)^2=0.$$

得 $m=1, n=-\frac{1}{2}, x=-2$. 于是

$$3m^2+2n^2=3\cdot1^2+2\cdot(-\frac{1}{2})^3=3-\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}.$$

也可利用判别式求解.

4.依题设，有

$$\begin{cases}\Delta_1=m^2-8n\geqslant0, & ①\\ \Delta_2=4n^2-4m\geqslant0 & ②\end{cases}$$

由①，②可得

$$n^4\geqslant m^2\geqslant 8n,$$

进而得 $n\geqslant2$，且 $m\geqslant4$. 当 $n=2, m=4$ 时，$m+n=6$ 为所求最小值.

二、解答题

5.**解** (1)原方程可变为

$$x^2-(\sqrt{3}+\sqrt{2})x+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=0,$$

即
$$(x-\sqrt{3})(x-\sqrt{2})=0.$$

故 $x_1=\sqrt{3}, x_2=\sqrt{2}$.

(2)方程两边同乘以$\sqrt{2}-1$，得

$$x^2+(1-2\sqrt{2})x+\sqrt{2}+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=0,$$

即 $$(x-\sqrt{2})[x-(\sqrt{2}-1)]=0.$$

故 $$x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{2}-1.$$

(3)原方程可变为

$$[(2-\sqrt{3})x]^2-(2-\sqrt{3})x-2=0, \quad ①$$

令 $y=(2-\sqrt{3})x$，则①可变为

$$y^2-y-2=0,$$

解得 $y_1=2,y_2=-1.$

当 $y_1=2$ 时，$x=\frac{2}{2-\sqrt{3}}=4+2\sqrt{3}$；

当 $y_2=-1$ 时，$x=-\frac{1}{2-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}.$

6.**证明**　原方程可变为

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta-1=0,$$

其判别式

$$\Delta=(\alpha+\beta)^2-4(\alpha\beta-1)=(\alpha-\beta)^2+4>0,$$

故方程有两个不相等的实数根.

7.**解**　因方程有实数根，故

$$\Delta=4(1+a)^2-4(3a^2+4ab+4b^2+2)=-4[(a-1)^2+(a+2b)^2]\leqslant 0,$$

仅有 $a-1=0,a+2b=0$. 故 $a=1,b=-\frac{1}{2}$.

8.**证明**　两方程的判别式为

$$\Delta_1=p_1{}^2-4q_1,$$
$$\Delta_2=p_1{}^2-4q_2,$$

满足

$$\begin{aligned}\Delta_1+\Delta_2&=(p_1{}^2-4q_1)+(p_2{}^2-4q_2)\\&=p_1{}^2+p_2{}^2-4(q_1+q_2)\\&=p_1{}^2+p_2{}^2-2p_1p_2\\&=(p_1-p_2)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 Δ_1,Δ_2 中至少有一个不小于零，表明两方程中至少有一个有实数根.

9.**证明**　分两种情形：

(ⅰ)若 $c \geqslant 0$,则 $a+c>0$.因 $b>a+c$,故 $b^2>(a+c)^2$,于是

$$\Delta = b^2-4ac>(a+c)^2-4ac=(a-c)^2 \geqslant 0.$$

(ⅱ)若 $c<0$,则 $ac<0$,于是 $\Delta = b^2-4ac>0$.

综上所述,恒有 $\Delta>0$.所以方程必有两个不同的实数根.

10.**证明** (ⅰ)若 $a=0$,则 $b^2 \geqslant 4ac$.(ⅱ)若 $a \neq 0$,由 $a-b+c=0$ 知 $ax^2+bx+c=0$ 有实数根 $x=-1$,所以 $\Delta=b^2-4ac \geqslant 0$.综上所述,命题获证.

11.**解** 当 $m=n=0$ 时,原方程变为

$$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x = 0,$$

故 x 可为任意实数.

当 $m=\pm n \neq 0$ 时,原方程变为 $-4mnx=0$,则 $x=0$,

当 $m \neq \pm n$ 时,原方程变为

$$(m+n)(m-n)x^2-4mnx-(m+n)(m-n)=0,$$

即 $$[(m+n)x+(m-n)][(m-n)x-(m+n)]=0$$

故 $x_1=\dfrac{n-m}{m+n}$, $x_2=\dfrac{m+n}{m-n}$.

12.**证明** 依题设 x,y,z 必有一个为正数,不妨设为 z,则 $x+y=-z$, $xy=\dfrac{1}{z}$.

根据韦达定理的逆定理,知 x,y 是关于 t 的二次方程 $t^2+zt+\dfrac{1}{z}=0$ 的两个实数根,故

$$\Delta = z^2-4 \cdot \frac{1}{z} \geqslant 0,$$

即 $z^3 \geqslant 4$,因此 $z \geqslant \sqrt[3]{4} > \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$.

练习二

一、填空题

1.因方程有异号两实数根.故 $m+3 \neq 0$、$\Delta=(2m)^2-4(m+3)(m-1)>0$,且根据韦达定理,有 $\dfrac{m-1}{m+3}<0$.又负根的绝对值较大,故 $\dfrac{2m}{m+3}<0$.可以解得 $-3<m<0$,故整数 $m=-1,-2$.

2.设方程一根为 x_1,另一根为 x_1+3.根据韦达定理,有 $x_1+(x_1+3)=-5$,

则 $x_1=-4, x_2=-1$. 于是,由韦达定理知 $k=x_1x_2=4$.

3. 设方程两根为 x_1, x_2,则 $x_1+x_2=k+1, x_1x_2=k+2$,于是

$$6={x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(k+1)^2-2(k+2)$$
$$=k^2-3.$$

解得 $k=\pm 3$,当 $k=3$ 时,$\Delta=(3-1)^2-4(3+2)<0$,而 $k=-3$ 时,$\Delta=(-3+1)^2-4(-3+2)>0$,故 $k=-3$.

4. 设 $x=y+1$,代入原方程得

$$y^2-2(a-1)y+2(a-1)=0. \quad ①$$

依题设方程①的两根均为正根,故

$$\begin{cases}\Delta=4(a-1)^2-8(a-1)\geqslant 0,\\ y_1+y_2=2(a-1)>0,\\ y_1y_2=2(a-1)>0\end{cases}$$

解得 $a\geqslant 3$.

5. 要使方程的两根互为相反数,须

$$\begin{cases}-\dfrac{k-4}{3}=0,\\ \dfrac{k-4}{3}\leqslant 0.\end{cases}$$

解之,得 $k=4$.

6. 依题设,$a\neq 0, b\neq 0, \frac{1}{a}\neq b^2$,且$(\frac{1}{a})^2-2\cdot\frac{1}{a}-1=0, (b^2)^2-2b^2-1=0$,故 $\frac{1}{a}, b^2$ 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个不等实数根.根据韦达定理可知$\frac{1}{a}+b^2=2, \frac{1}{a}\cdot b^2=-1$.故

原式 $=(b^2+\frac{b^2}{a}+\frac{1}{a})^{2000}=(2-1)^{2001}=1$.

二、解答题

7. 证明 根据韦达定理,有 $a+b=-p, ab=1, c+d=-q, cd=1$,于是

$$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$$
$$=[ab-(a+b)c+c^2][ab+(a+b)d+d^2]$$
$$=(1+pc+c^2)(1-pd+d^2)$$
$$=(1+pc+c^2)-(pd+p^2cd+c^2pd)+(d^2+d^2pc+c^2d^2)$$
$$=(1+pc+c^2)-(pd+p^2+cp)+(d^2+dp+1)$$

$= 2 + c^2 + d^2 - p^2$

$= 2 + (c + d)^2 - 2cd - p^2$

$= q^2 - p^2.$

8. **证明** 根据韦达定理，有 $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a$. 于是

$$\alpha^2 + \beta^2 \geqslant 2\alpha\beta = 2a = 2(\alpha + \beta).$$

9. **证明** (1)假设 $x_1 > 0$，则由 $x_1x_2 > 0$ 可知 $x_2 > 0$. 根据韦达定理，有

$$0 < x_1 + x_2 = -b = -x_1'x_2',$$

即 $x_1'x_2' < 0$. 与题设矛盾，故 $x_1 < 0$，同理 $x_2 < 0, x_1' < 0, x_2' < 0$.

(2)对于方程 $x^2 + bx + c = 0$，根据韦达定理，有

$c - (b - 1) = x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geqslant 0$，故 $c \geqslant b - 1$.

对于方程 $x^2 + cx + b = 0$，同样有 $b \geqslant c - 1$.

综上所述，$b - 1 \leqslant c \leqslant b + 1$.

10. **解** 根据韦达定理，有 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$，于是

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 7,$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 47.$$

因 α, β 也是 $x^6 - px^2 + q = 0$ 的根，故

$$\alpha^6 - p\alpha^2 + q = 0, \quad ①$$

$$\beta^6 - p\beta^2 + q = 0. \quad ②$$

① − ②得 $$p = \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = 48.$$

② × α^2 − ① × β^2 得

$$(\alpha^2 - \beta^2)q + \alpha^2\beta^6 - \alpha^6\beta^2 = 0,$$

所以 $$q = \frac{\alpha^2\beta^2(\alpha^4 - \beta^4)}{\alpha^2 - \beta^2} = \alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2) = 7.$$

11. **证明** 由韦达定理得 $a + b = 3, ab = 1, c + d = 4, cd = 2$. 故

$$a + b + c + d = 7,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a + b)^2 - 2ab + (c + d)^2 - 2cd = 19.$$

(1) $\frac{a^2}{b + c + d} + \frac{b^2}{c + d + a} + \frac{c^2}{d + a + b} + \frac{d^2}{a + b + c}$

$= a\left[\frac{7 - (b + c + d)}{b + c + d}\right] + b\left[\frac{7 - (c + d + a)}{c + d + a}\right] + c\left[\frac{7 - (d + a + b)}{d + a + b}\right] +$

$d\left[\frac{7 - (a + b + c)}{a + b + c}\right]$

$$=a(\frac{7}{b+c+d}-1)+b(\frac{7}{c+d+a}-1)+c(\frac{7}{d+a+b}-1)+d(\frac{7}{a+b+c}-1)$$

$$=7(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a-b}+\frac{d}{a+b+c})-(a+b+c+d)$$

$$=7B-7.$$

$$(2)\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{d+a+b}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$=a^2(\frac{7}{b+c+d}-1)+b^2(\frac{7}{c+d+a}-1)+c^2(\frac{7}{d+a+b}-1)+d^2(\frac{7}{a+b+c}-1)$$

$$=7(\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c})-(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$=7(7B-7)-19$$

$$=49B-68.$$

12. **证明** 若 $a-b=0$,则 $b-c=0$,此时 $a=b=c$,有 $b+c=2a$,若 $a-b\neq 0$,构造一元二次方程

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0, \qquad ①$$

则 $\Delta=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=4[\frac{1}{4}(b-c)^2-(a-b)(c-a)]=0.$

故方程有相等实数根,又将 $x=1$ 代入①的左边,有

$$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0,$$

故方程两根均为 1,根据韦达定理,有

$$\frac{c-a}{a-b}=1,$$

所以 $b+c=2a$.

练习三

一、填空题

1. 方程的另一个根为 $2+\sqrt{3}$. 根据韦达定理知 $-a=(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=4$, $a=-4$, $b=(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$, 于是 $a+b=(-4)+1=-3$.

2. 原方程可变为 $(x-a)(x-8)=1$. 因方程有两个整数根,故 $\begin{cases}x-a=1\\x-8=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-a=-1\\x-8=-1\end{cases}$,均得 $a=8$.

3. 原方程可变为 $px^2-qx+1993\times 2=0$,因方程两根均为奇数,且根据韦达

定理，两根 x_1,x_2 满足 $x_1x_2=\dfrac{1993\times 2}{p}$，故 $p=1$，进而知 $q=x_1+x_2=2+1993=1995$，所以 $2p+q=1997$.

4. 设方程两根为 $x_1,x_2,x_1\leqslant x_2$，则

$$x_1x_2-(x_1+x_2)+1=(x_1-1)(x_2-1)=p+q+1=199,$$

故 $\begin{cases}x_1-1=1,\\ x_2-1=199;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-1=-199,\\ x_2-1=-1.\end{cases}$ 因 x_1,x_2 为非零整数，故 $x_1=2,x_2=200$，根据韦达定理，$p=-(x_1+x_2)=-202$.

二、解答题

5. **证明** 设 α,β 是方程的两个整数根，根据韦达定理，得 $\alpha+\beta=p,\alpha\beta=q$. 因 c 是 $\alpha、\beta$ 的公约数，故 $\alpha=ca,\beta=cb$ （a,b 为整数），于是

$$p=\alpha+\beta=ca+cb=c(a+b),$$

$$q=\alpha\beta=c^2ab=c(abc).$$

故 c 也是 p,q 的公约数.

6. **证明** 因 $p、q、r$ 为有理数，且

$$\begin{aligned}\Delta&=(-2p)^2-4(p^2-q^2+2qr-r^2)\\&=4p^2-4p^2+4q^2-8qr+4r^2\\&=4(q-r)^2\end{aligned}$$

为完全平方式，故方程两根为有理数.

7. **解** 原方程可变为

$$x^2-4(m-1)x+3m^2-2m+4k=0,$$

$$\begin{aligned}\Delta&=[4(m-1)]^2-4(3m^2-2m+4k)\\&=4(m^2-6m-4k+4)\\&=4[(m-3)^2-(4k+5)].\end{aligned}$$

欲使原方程恒有有理数根，当且仅当 $4k+5=0$，即 $k=-\dfrac{5}{4}$.

8. **证明** 若方程有整数根，则第一个方程的判别式

$$\Delta_1=(10a)^2-4(5b+3)=4(25a^2-5b-3)$$

为平方数. 但

$$25a^2-5b-3=5(5a^2-b)-3$$

其个位数字只能是 2,7 之一. 而完全平方数的个位数必须是 0,1,4,5,6,9，故 Δ_1 不可能是平方数，第一个方程的两个根不可能是有理数，也就不可能是整数。

同理可证第二个方程也没有整数根.

9. **证明** 原方程的两个实数根为

$$x_{1,2}=-p\pm\sqrt{p^2-2q}.$$

假若方程有有理数根，即为整数根，则 p^2-2q 为一个平方数. 设 $\sqrt{p^2-2q}=m$，则

$$p^2-m^2=2q,$$

即
$$(p+m)(p-m)=2q.$$

因 $p+m,p-m$ 同奇偶，故 $2q$ 为奇数或 4 的倍数，但 q 为奇数，矛盾。故原方程的根为无理数.

10. **解** 若 $k=0$，得 $x=1$，即 $k=0$ 符合要求.

若 $k\neq0$，设二次方程的两个整数根为 x_1,x_2，由韦达定理，得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{k+1}{k}=-1-\dfrac{1}{k}, & ①\\ x_1x_2=\dfrac{k-1}{k}=1-\dfrac{1}{k}. & ②\end{cases}$$

② − ①得
$$x_1x_2-x_1-x_2=2.$$

所以
$$(x_1-1)(x_2-1)=3.$$

因 (x_1-1)，(x_2-1) 均为整数，所以有 $\begin{cases}x_1-1=1,\\x_2-1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-1=-1,\\x_2-1=-3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-1=3,\\x_2-1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_1-1=-3,\\x_2-1=-1.\end{cases}$ 解后可得 $x_1+x_2=6$ 或 $x_1+x_2=-2$，即 $-1-\dfrac{1}{k}=6$ 或 $-1-\dfrac{1}{k}=-2$，得 $k=1$ 或 $k=-\dfrac{1}{7}$. 经检验，均符合要求.

综上所述，符合题目要求的 k 值有三个，即 $0,1,-\dfrac{1}{7}$.

11. **解** (1)设公共根为 t，则

$$t^2-pt+2q=0,$$
$$t^2-qt+2q=0.$$

两方程相减得
$$(p-q)t+2(p-q)=0.$$

故
$$(p-q)(t+2)=0.$$

又因 $p\neq q$，故 $t=-2$.

即 $x=-2$ 是二个方程的公共根.

(2)由(1)知 $x=-2$ 是 $x^2-px+2q=0$ 的根,故有

$$(-2)^2-p(-2)+2q=0,$$

即 $$p+q=-2. \quad ①$$

又 p,q 是方程 $4x^2+mx+n=0$ 的两根,

故 $$\begin{cases} p+q=-\frac{m}{4}, & ② \\ pq=\frac{n}{4}. & ③ \end{cases}$$

①代入②得 $m=8$.

又因方程 $4x^2+mx+n=0$ 有不等实根,所以

$$\Delta=m^2-4\cdot4n>0.$$

即 $$64-16n>0,$$

$$n<4.$$

又因 n 是正整数,故 n 只能是1,2,3.所以可能的数对是(8,1),(8,2),(8,3).

(3)以(8,1),(8,2)代入②,③得$\begin{cases} p+q=-2, \\ pq=\frac{1}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} p+q=-2, \\ pq=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 解方程组知 $p、q$ 均不为有理数.而以(8,3)代入②,③得$\begin{cases} p+q=-2, \\ pq=\frac{3}{4}. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p=-\frac{3}{2}, \\ q=-\frac{1}{2}. \end{cases}$ 或$\begin{cases} p=-\frac{1}{2}, \\ q=-\frac{2}{3}. \end{cases}$

由题设 $p<q$,故 $p=-\frac{3}{2}, q=-\frac{1}{2}$.这时,方程 $x^2-px+2q=0$ 成为 $x^2+\frac{3}{2}x-1=0$.已知这方程有根 $x=-2$,由韦达定理知另一个根为$\frac{1}{2}$.

12.**解** 设两直角边长分别为 a,b(a,b 为整数),根据韦达定理知 $a+b=m+2$,故 m 为整数.

因 a,b 为方程 $x^2-(m+2)x+4m=0$ 的两整数根,故

$$\Delta=(m+2)^2-4x4m=m^2-12m+4$$

必为某整数的完全平方数.设 $m^2-12m+4=k^2$(k 为正整数),则关于 m 的方程

$m^2-12m+4-k^2=0$应有整数解，故

$$\Delta_1=12^2-4(4-k^2)=4(32+k^2)$$

是一个完全平方数，可设

$$32+k^2=(k+n)^2 \quad (n\text{为正整数}),$$

即 $$n(2k+n)=32=1\times 32=2\times 16=4\times 8.$$

由于 $n(2k+n)$同奇偶，故$\begin{cases}n=2\\2k+n=16\end{cases}$或$\begin{cases}n=4\\2k+n=8\end{cases}$，解得 $k=7$ 或 2.

当 $k=7$ 时，$m=15$，此时三角形三边长为 5，12，13；

当 $k=2$ 时，$m=12$，此时三角形三边长为 6，8，10.

练习四

一、填空题

1. 设两方程公共的实数根为 x_0，则

$$x_0^2+x_0+a=0, \quad ①$$

$$x_0^2+ax_0+1=0, \quad ②$$

② - ①整理得 $\quad (a-1)(x_0-1)=0.$

故 $a=1$ 或 $x_0=1$.

若 $a=1$，原方程均为 $x^2+x+1=0$，其判别式 $\Delta=1^2-4<0$，没有实数根，不合题意，所以 $a\neq 1$.

因此 $x_0=1$，代入①，得 $a=-2$.

2. 由两个方程得 $x^2+4x-a^2=0$，$\Delta=16+4a^2>0$，有 $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+a^2}$. 注意到只有 $-2+\sqrt{4+a^2}>0$，代入第二个方程可得 y 的两个不同的值，故方程组的实数解有 2 组.

3. 方程组可变为$\begin{cases}x+y=2,\\xy=1+z^2,\end{cases}$则 x,y 是方程 $t^2-2t+(1+z^2)=0$ 的两根，有

$\Delta=4-4(1+z^2)=-4z^2\geqslant 0$. 故 $z=0$，进而得 $x=y=1$.

所以方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=0.\end{cases}$

4. 设 $xy=\frac{71}{2}+a, x+y=\frac{71}{2}-a$，则

$$x^2y+xy^2=xy(x+y)=\frac{71^2}{4}-a^2=880,$$

解得 $a=\pm\frac{39}{2}$，所以 $xy=55, x+y=16$，或 $xy=16, x+y=55$，因 x, y 为正整数，故后一种情形不可能发生．于是

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=16^2-2\times55=146.$$

二、解答题

5. 解 两方程相减，可得

$$x=2y+3, \qquad ①$$

①代入第一个方程得

$$(2y+3)^2-y^2-(2y+3)+2=0,$$

即

$$(3y+4)(y+2)=0.$$

所以 $y_1=-2, y_2=-\frac{4}{3}$，代入①得原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\y_2=-\frac{4}{3}.\end{cases}$

6. 解 将第一个方程代入第二个方程可得

$$4x^2-2\sqrt{n}x+n-6=0. \qquad ①$$

因原方程组有两组相异的正数解，故

$$\begin{cases}\Delta=4n-16(n-6)>0,\\n-6>0\end{cases}$$

解得 $6<n<8$，故正整数 $n=7$．由①可得 $x_1=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}, x_2=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$，代入第一个方程，有 $y_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{4}$，$y_2=\frac{1+\sqrt{21}}{4}$，故原方程组的解为 $\begin{cases}x_1=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4},\\y_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{4};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4},\\y_2=\frac{1+\sqrt{21}}{4}.\end{cases}$

7. 解 显然 $x\neq0$，原方程可变为

$$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0,$$

即 $$2(x^2+\frac{1}{x^2})+3(x+\frac{1}{x})-16=0. \quad ①$$

令 $x+\frac{1}{x}=t$,则①可变为

$$2(t^2-2)+3t-16=0,$$

解得 $t_1=-4, t_2=\frac{5}{2}$.

由 $x+\frac{1}{x}=-4$ 得 $x_1=-3+\sqrt{3}, x_2=-2-\sqrt{3}$;

由 $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ 得 $x_3=2, x_4=\frac{1}{2}$.

8.**解** 原方程可变为

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72, \quad ①$$

令 $t=6x+7$,则①可变为

$$y^2(y+1)(y-1)=72,$$

解得 $y^2=9, y^2=-8$(舍去). 于是$(6x+7)^2=9$,可得 $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=-\frac{5}{3}$.

9.**解** 令$\sqrt{3}=t$,原方程可变为

$$xt^2+(2x^2+1)t+x^3-1=0. \quad ①$$

显然 $x\neq 0$,①可变为

$[xt+(x^2+x+1)][t+(x-1)]=0$,

于是 $t_1=-\frac{x^2+x+1}{x}, t_2=-(x-1)$,即$\sqrt{3}=-\frac{x^2+x+1}{x}$,$\sqrt{3}=1-x$,解得 $x_{1,2}=\frac{-\sqrt{3}-1\pm\sqrt[4]{12}}{2}, x_3=1-\sqrt{3}$.

10.解 三个方程依次记作①,②,③.①-②得

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0.$$

即 $$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

分别将①和③中的 b, c 用 a 来代替,得

$$3a^2=d^k. \quad ④$$

$$3a=d. \quad ⑤$$

④-⑤^k 得 $3a^2=3^k\cdot a^k$.

当 $k=1$ 时,$a^2=a$,从而$\begin{cases}a=b=c=1,\\ d=3.\end{cases}$或 $a=b=c=d=0$.

当 $k=2$ 时,$a^2=0$,只有 $a=b=c=d=0$.

当 $k=3$ 时，$a^3=\frac{1}{9}a^2$，从而 $\begin{cases}a=b=c=\frac{1}{9},\\ d=\frac{1}{3}.\end{cases}$ 或 $a=b=c=d=0$.

当 $k\geqslant 4$ 时，$a=0$ 或 $a^{k-2}=\frac{1}{3^k-1}$.

由 $a=0$ 总有 $a=b=c=d=0$.

由 $a^{k-2}=\frac{1}{3^{k-1}}$，可知

若 k 是奇数 $a=\sqrt[k-2]{\frac{1}{3^{k-1}}}$，则 $\begin{cases}a=b=c=\sqrt[k-2]{\frac{1}{3^{k-1}}},\\ d=3\sqrt[k-2]{\frac{1}{3^{k-1}}};\end{cases}$

若 k 是偶数 $a=\pm\sqrt[k-2]{\frac{1}{3^{k-1}}}$，则 $\begin{cases}a=b=c=\pm\sqrt[k-2]{\frac{1}{3^{k-1}}},\\ d=\pm 3\sqrt[k-2]{\frac{1}{3^{k-1}}}.\end{cases}$

因此，当 $k=2$ 时，原方程组只有一组解；当 k 是奇数时，原方程组有两组解；当 k 是偶数且 $k\neq 2$ 时，原方程组有三组解，不存在多于三组解的情况.

练习五

一、填空题

1. 若 x_0 是方程的根，则 $-x_0$ 也是方程的根，故非零实数根成对出现，所以原方程根的和为 0.

2. 显然 $6-2x\geqslant 0$，即 $x\leqslant 3$. 原方程可变为

$$x^2+4x-5=6-2x,$$

$$x^2+4x-5=-(6-2x).$$

所以 $x^2+6x-11=0$ 或 $x^2+2x+1=0$，解得 $x=-3\pm 2\sqrt{5}$ 或 $x=-1$.

3. 设 $\sqrt{x-1}=y$，则 $\begin{cases}x+y=7,\\ y^2=x-1\end{cases}$，可得 $y^2+y-6=0$，$y_1=2$，$y_2=-3$（舍去），于是 $2=\sqrt{x-1}$，解得 $x=5$.

4. 因 $(\sqrt{2x+1})^2-(\sqrt{x+5})^2=x-4$，故

$$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}=\frac{x-4}{6}. \quad ①$$

由①与原方程联立，可得

$$\sqrt{2x+1}=\frac{x+32}{12},$$

两边平方得　　$x^2-224x+880=0$,

解得 $x_1=4$, $x_2=220$，经检验 $x=220$ 是增根，$x=4$ 是原方程的根.

5. 因 $\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}\right)^2-\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2=x-1$，故

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}. \quad ①$$

①与原方程联立可得

$$2\sqrt{x-\frac{1}{x}}=x-\frac{1}{x}+1,$$

即　　$\left(\sqrt{x-\frac{1}{x}}-1\right)^2=0$,

所以 $x-\frac{1}{x}=1$，解得 $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$（负号舍去），所以原方程的根为 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

6. 原方程可变为

$\sqrt{x+8}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{3x+6}-\sqrt{x+3}$,

两边平方，整理得　　$\sqrt{(x+8)(3x+1)}=\sqrt{(3x+6)(x+3)}$,

于是　　$(x+8)(3x+1)=(3x+6)(x+3)$,

解得 $x=1$. 经检验 $x=1$ 是原方程的根.

二、解答题

7. **解**　原方程可变为

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{10}{3}.$$

令 $y=\frac{x}{x^2+1}$，则 $y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3}$，解得 $y_1=3$, $y_2=\frac{1}{3}$. 因 $x^2+1>|x|$，故 $y=\frac{1}{3}$，于是 $\frac{x}{x^2+1}=\frac{1}{3}$，即 $x^2-3x+1=0$，解得 $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

8. **解**　设 $\sqrt[3]{x}=1+y$, $\sqrt[3]{2-x}=1-y$，则

$$x=(1+y)^3, \quad ①$$

$$2-x=(1-y)^3. \quad ②$$

① + ②得　$6y^2+2=2$，即 $y=0$，于是 $x=1$.

9. **解**　设 $\sqrt[3]{x-1}=u$, $\sqrt[3]{y+2}=v$，则 $x=u^3+1$, $y=v^3+2$，原方程组可变为

$$\begin{cases} u^3+v^3=-19, & ① \\ u+v=-1. & ② \end{cases}$$

由①得 $$(u+v)(u^2-uv+v^2)=-19$$

所以 $$(u+v)[(u+v)^2-3uv]=-19. \quad ③$$

②代入③整理得 $$uv=-6. \quad ④$$

联立②,④解得 $\begin{cases} u=-3, \\ v=2. \end{cases}$ 或 $\begin{cases} u=2, \\ v=-3. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x=-26, \\ y=6, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=9, \\ y=-29, \end{cases}$ 即为原方程组的解.

10. **证明** (1)原方程可变为

$$3x^2+2a(a+1)x+a^3=0. \quad ①$$

易验证 $x=0,-a,-a^2$ 不是①的根,故方程①与原方程是同解方程.

因 $a<0$,故 $a^3<0$,根据判别式和韦达定理可知方程①有两异号实数根,即知原方程有两异号实数根.

(2)$\Delta=4a^2(a+1)^2-12a^3=3a^2(a-1)^2$,不妨设 $x_1>x_2$,注意到 $a<0$,有

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-a(a+1)-a\sqrt{a^2-a+1}}{3} \\ &< \frac{-a(a+1)-a\sqrt{a^2-2a+1}}{3} \\ &= \frac{-a(a+1)-a(1-a)}{3} \\ &= -\frac{2}{3}a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-a(a+1)+a\sqrt{a^2-a+1}}{3} \\ &> \frac{-a(a+1)+a\sqrt{a^2-2a+1}}{3} \\ &= \frac{-a(a+1)+a(1-a)}{3} \\ &= -\frac{2a^2}{3}. \end{aligned}$$

11. **解** 原方程可变为

$$\sqrt{2x-4}=\sqrt{x+a}+1$$

$$\Rightarrow x-a-5=2\sqrt{x+a}$$

$$\Rightarrow x^2-(14+2a)x+a^2+6a+25=0. \quad ①$$

$$\Delta=(14+2a)^2-4(a^2+6a+25)=32(a+3)\geqslant 0,$$

可得 $a\geqslant -3$.

方程①的根为 $x_{1,2}=7+a\pm 2\sqrt{6+2a}$. 注意到 a 为整数，$x_{1,2}$中必有整数根，故 $6+2a$ 为平方数. 又 $0\leqslant 6+2a<66$，$6+2a$ 为偶数，故 $6+2a$ 可能为 0，4，16，36，64. 此时 $a=-3,-1,5,15,29$. 当 $a=-3$ 时，$x_1=x_2=4$；当 $a=-1$ 时，$x_1=10$，$x_2=2$(增根). 当 $a=5$ 时，$x_1=20$，$x_2=4$(增根)；当 $a=15$ 时，$x_1=34$，$x_2=10$(增根)；当 $a=29$ 时，$x_1=52$，$x_2=20$(增根)，故 a 可为 $-3,-1,5,15,29$.

12. **解** (1)原方程可变为

$$\frac{x^3+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{x^3-1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}=2x.$$

$$\Leftrightarrow(x+1)+\frac{1}{x^2-x+1}+(x-1)-\frac{1}{x^2+x+1}=2x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}=0$$

于是 $\quad x^2-x+1=x^2+x+1,$

解得 $x=0$. 经检验 $x=0$ 是原方程的根.

(2)原方程两边同乘 12，可变为

$$8x=x^2+\frac{36}{x^2}+\frac{48}{x},$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{6}{x}\right)^2-8\left(x-\frac{6}{x}\right)+12=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-\frac{6}{x}-2\right)\left(x-\frac{6}{x}-6\right)=0.$$

所以 $$x-\frac{6}{x}-2=0 \quad ①$$

或 $$x-\frac{6}{x}-6=0 \quad ②$$

由①解得 $x_{1,2}=1\pm\sqrt{7}$；

由②解得 $x_{3,4}=3\pm\sqrt{15}$.

经检验 $x_1=1+\sqrt{7}$，$x_2=1-\sqrt{7}$，$x_3=3+\sqrt{15}$，$x_4=3-\sqrt{15}$，均为原方程的根.

练习六

1. **解** (1)方程 $4x^2+8x-1=0$ 的根是

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}.$$

故 $$4x^2+8x-1=4\left(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5}).$$

(2)方程 $4x^2-4\sqrt{5}x+5=0$ 的根是

$$x=\frac{4\sqrt{5}\pm\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4\times4\times5}}{2\times4}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

故 $4x^2-4\sqrt{5}x+5=4\left(x-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=(2x-\sqrt{5})^2$(可直接观察得到).

(3)令原式 $=2x^2+(y-4)x+(-y^2+5y-6)=0$,则

$$x=\frac{-(y-4)\pm\sqrt{(y-4)^2+8(y^2-5y+6)}}{4}$$
$$=\frac{-(y-4)\pm(3y-8)}{4}.$$

所以 原式 $=2\left(x-\frac{y-2}{2}\right)(x+y-2)=(2x-y+2)(x+y-3)$.

2.**解** 原式 $=6x^2-yx-(2y^2-my+6)$.

考虑 x 的二次方程 $6x^2-yx-(2y^2-my+6)=0$,

$$\Delta=(-y)^2+24(2y^2-my+6)=49y^2-2my+144,$$

要使原式能分解两个一次因式之积,Δ 必为完全平方式,即 $49y^2-24my+144$ 有相等的二实数根,$\Delta_1=(24m)^2-4\times49\times144=0$,解得 $m=\pm7$.

当 $m=7$ 时,$x_1=\frac{2}{3}y-1$,$x_2=-\frac{y}{2}+1$,

原式 $=6\left(x-\frac{2}{3}y+1\right)\left(x+\frac{y}{2}-1\right)=(3x-2y+3)(2x+y-2)$.

当 $m=-7$ 时,$x_1=\frac{2}{3}y+1$,$x_2=-\frac{y}{2}-1$,

原式 $=6\left(x-\frac{2}{3}y-1\right)\left(x+\frac{y}{2}+1\right)=(3x-2y-3)(2x+y+2)$.

3.**解** 设甲每小时走 x 公里,则乙每小时走 $(x-1)$ 公里,依题设,有

$$\frac{20}{x-1}-\frac{20}{x}=1.$$

解得 $x_1=5$,$x_2=-4$(舍去).$x-1=4$.

答:甲每小时走5公里,乙每小时走4公里.

4.**解** 设去时火车速度为 x 公里/时,则返回时火车速度为 $(x+3)$ 公里/

时，依题设，有

$$\frac{30}{x}+\frac{30}{x+3}+\frac{1}{3}=2\frac{4}{9}.$$

解得 $x_1=27, x_2=-\frac{30}{19}$（舍去）.

答：去时火车的速度为 27 公里/时，返回时火车速度为 30 公里/时.

5.**解** 设第一个农妇有 x 个鸡蛋，则第二个农妇有 $100-x$ 个鸡蛋. 根据题意，第一个农妇卖鸡蛋的款是 $\frac{15}{100-x}\cdot x$ 个铜板，第二个农妇卖鸡蛋所得的款是 $\frac{20}{3x}\cdot(100-x)$ 个铜板. 于是

$$\frac{15x}{100-x}=\frac{20(100-x)}{3x}.$$

可得 $$x^2+160x-8000=0.$$

解得 $x_1=40, x_2=-200$（舍去）.

答：第一个农妇带有 40 个鸡蛋，第二个农妇带有 60 个鸡蛋.

6.**解** 设每次倒出 x 升，则第一次倒出纯酒精 x 升，剩下 $(20-x)$ 升纯酒精，加水后，浓度为 $\frac{20-x}{20}$；第二次倒出 x 升溶液后含纯酒精 $\frac{20-x}{20}x$ 升. 依题设，有

$$20-x-\frac{20-x}{20}x=18.05.$$

整理得 $$(20-x)^2=361.$$

解得 $x_1=1, x_2=39$（舍去）

答：每次倒出液体 1 升.

7.**解** 设 $\overset{\frown}{ACB}$ 的长度为 x cm，又设甲、乙原来的速度分别为 v_1、v_2（$v_1\neq v_2$）. 由题意得

$$\begin{cases}\dfrac{40}{v_1}=\dfrac{x-40}{v_2}, & ①\\[2ex] \dfrac{300-20-(x-40)}{2v_1}=\dfrac{x-40+20}{\frac{1}{2}v_2}. & ②\end{cases}$$

由①，②得 $$\frac{2\times40}{320-x}=\frac{x-40}{2(x-20)}. \quad ③$$

由③可得 $$x^2-200x+9600=0.$$

解得 $x_1=120, x_2=80$. 当 $x=80$ 时，代入①得 $v_1=v_2$，不合题意，舍去.

答：$\overset{\frown}{ACB}$的长为 120cm.

8.**解** 若甲中倒 x 克酒精至乙中，这时甲中酒精为$(8-x)$克，乙中酒精溶液有$(10+x)$克，浓度为$\frac{x}{x+10}$. 乙中倒 $2x$ 克混合液至甲中，这时甲中溶液为$[(8-x)+2x]$克，所含酒精为$[(8-x)+\frac{x}{10+x}2x]$克. 依题设，有

$$\frac{8-x+\frac{2x^2}{x+10}}{(8-x)+2x}=\frac{60}{100}.$$

化简得

$$x^2-21x+80=0$$

解得 $x=16\pm\sqrt{176}$("+"舍去)，$x=16-\sqrt{176}\approx 2.7$.

答：从甲容器中倒入乙容器的酒精约为 2.7 克.

9.**解** 设东、西两村相距 x 公里，相遇时，甲行了$(\frac{x}{2}+20)$公里，乙行了$(\frac{x}{2}-20)$公里，甲的速度为$\frac{1}{2}(\frac{x}{2}-20)$公里/时，乙的速度为$\frac{1}{8}(\frac{x}{2}+20)$公里/时. 依题设，有

$$\frac{\frac{1}{2}(x+40)}{\frac{1}{4}(x-40)}=\frac{\frac{1}{2}(x-40)}{\frac{1}{16}(x+40)}.$$

化简得 $$(x+40)^2=4(x-40)^2,$$

解得 $x_1=120$，$x_2=\frac{40}{3}$(舍去).

$$\frac{1}{2}(\frac{120}{2}-20)=20;$$

$$\frac{1}{8}(\frac{120}{2}+20)=10.$$

答：东西两村相距 120 公里，甲的速度为 20 公里/时，乙的速度为 10 公里/时.

10.**解** 设从 A 到 B 的上坡路为 x 公里，自行车上坡速度为 y 公里/时. 依题设，得

$$\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{36-x}{y+6}=2\frac{2}{3}, & ①\\ \frac{36-x}{y}+\frac{x}{y+6}=2\frac{1}{3}. & ②\end{cases}$$

由①,②得

$$5y^2-42y-216=0.$$

解得 $y_1=12, y_2=-3$(舍去),代入①得 $x=24$.

从 A 到 B 的下坡路为 $36-24=12$(公里),自行车的下坡速度为 $12+6=18$(公里/时).

11. **解** 设从 A 地到河口的路程为 s 公里,从河口沿河到达 B 地的路程为 s_1 公里,拖轮不拖带的速度为 v 公里/时,水流速度为 v_1 公里/时,拖轮拖带从河口到达 B 所用时间为 x,则

$$\begin{cases}\dfrac{s}{v+v_1}+\dfrac{s_1}{v}=61,\\[2ex] \dfrac{s}{v-v_1}+\dfrac{s_1}{v}=79,\\[2ex] \dfrac{s}{v_1}+\dfrac{s_1}{\frac{v}{2}}=411.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{s}{v+v_1}+\dfrac{x}{2}=61,\\[2ex] \dfrac{s}{v-v_1}+\dfrac{x}{2}=79,\\[2ex] \dfrac{s}{v_1}+x=411.\end{cases}$$

消去 s, v, v_1 得

$$\frac{1}{122-x}-\frac{1}{158-x}=\frac{1}{411-x}.$$

解得 $x_1=20, x_2=244$(舍去).

答:所用的时间为 20 小时.

练习七

一、选择题

1. 设直线 AB 为 $y=kx+b$,将 $A(2,3,)B(4,2)$代入得

$$\begin{cases}2k+b=3,\\ 4k+b=2.\end{cases}$$

解得 $k=-\dfrac{1}{2}, b=4$,故 AB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+4$,它与 x 轴交于 $C(8,0)$. 于

是

$$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}\times8\times3-\frac{1}{2}\times8\times2=4.$$

选(A).

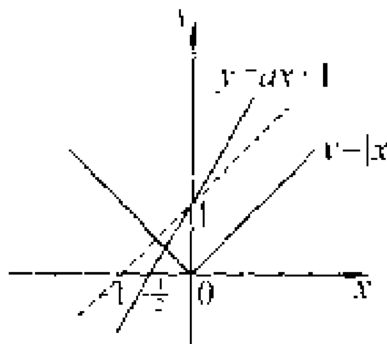
2. 为使直线 $y=ax$ 通过点 $A(2,4)$，应有 $4=2a$，$a=2$.同理 $a=-2$ 时，该直线过点 B，$a=1$ 时，该直线过点 C；$a=-\frac{2}{3}$时，该直线过点 D.故当 $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 2$ 时，直线 $y=ax$ 与 AD 边相交；当 $-2\leqslant a\leqslant 1$ 时直线 $y=ax$ 与边 BC 相交；当 $-\frac{2}{3}\leqslant a\leqslant 1$ 时，直线 $y=ax$ 与 AD、BC 边都相交.选(C).

3. 因点$(2,-\frac{1}{2})$在直线 $y=kx+\frac{1}{2}$ 上，故 $-\frac{1}{2}=2k+\frac{1}{2}$，可得 $k=-\frac{1}{2}$.该直线为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.设该直线上与点$(1,1)$、$(5,3)$等距离的点是$(a,b)$则 $a+2b=1$，且

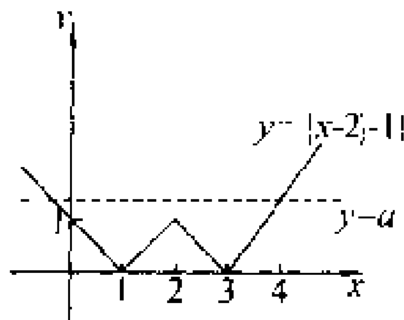
$$(a-1)^2+(b-1)^2=(a-5)^2+(b-3)^2,$$

解得 $a=5$，$b=-2$.故选(B).

4. 原方程的根即是函数 $y=|x|$与 $y=ax+1$ 的交点的横坐标.方程有一个负根而没有正根，即是过点$(0,1)$的直线与第二象限角平分线相交而不与第一象限角平分线相交.如图所示，$-1\leqslant-\frac{1}{a}<0$，即 $a\geqslant1$，选(C).



(第 4 题)



(第 5 题)

5. 先作出 $y=||x-2|-1|$的图象，如图所示.由于方程$||x-2|-1|=a$ 的根的个数就是直线$y=a$ 与函数$y=||x-2|-1|$图象的交点的个数，故不难看出仅当 $a=1$ 时方程有三个解.

二、填空题

6. 由 $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{\frac{1}{x}}+\sqrt{\frac{1}{(\frac{1}{x})^2}+1}$，可知 $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$.

7. 易知四条直线所围成的是一个直角梯形.将 $y=-1$ 代入到 $y=mx-3$

中,得 $x=\frac{2}{m}$,所以直线 $y=mx-3$ 与 $y=-1$ 的交点坐标为$(\frac{2}{m},-1)$.

同样,可求得直线 $y=mx-3$ 与 $y=3$ 的交点坐标为$(\frac{6}{m},-3)$.

直角梯形的面积为

$$\frac{1}{2}(|\frac{2}{m}-1|+|\frac{6}{m}-1|)\times 4$$

$$=\frac{1}{2}[(|\frac{2}{m}-1|+|\frac{6}{m}-1|)]\times 4\quad(\text{组成四边形时}\frac{2}{m}-1\text{与}\frac{6}{m}-1\text{同号})$$

$$=2|\frac{8}{m}-2|.$$

所以 $2|\frac{8}{m}-2|=12$,解得 $m=1$ 或 $m=-2$.

8. 由 $f(19)=95$ 得

$$19^7-19^5a-19^5b-19c+8=95.$$

所以

$$19^7-19^5a+19^3b-19c=87.$$

即

$$f(-19)=(-19)^7-a(-19)^5+b(-19)^3-c(-19)+8$$
$$=-(19^7-19^5a+19^3b-19c)+8$$
$$=-87+8=-79.$$

9. 注意到 $f(x)=ax+2a+1$ 图象是一条直线,当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,u 的值有正有负,则

$$\begin{cases}f(1)>0,\\ f(-1)<0.\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}f(1)<0,\\ f(-1)>0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}a+2a+1>0,\\ -a+2a+1<0.\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}a+2a+1<0,\\ -a+2a+1>0.\end{cases}$$

解得

$$-1<a<-\frac{1}{3}.$$

三、解答题

10. **解** $y=(a-\frac{1}{a})a+\frac{1}{a}$,以下分两种情况:

(ⅰ)当 $a>1$ 时,$a-\frac{1}{a}>0$,于是函数 $y=(a-\frac{1}{a})x+\frac{1}{a}$ 的函数值是随着 x 的增加而增加的,所以当 $x=0$ 时,y 取最小值$\frac{1}{a}$;当 $x=1$ 时,y 取最大值 a.

(ⅱ)当 $0<a<1$ 时,$a-\frac{1}{a}<0$,于是函数 $y=(a-\frac{1}{a})x+\frac{1}{a}$ 的函数值是随着 x 的增加而减少的,所以当 $x=0$ 时,y 取最大值$\frac{1}{a}$;当 $x=1$ 时,y 取最小值

a.

11. **解** (1) $\begin{cases} n^2-1\neq 0, \\ n^2+n-1=1. \end{cases}$ 解得 $n=-2$.

(2) $\begin{cases} n^2-1\neq 0, \\ n^2+n-1=-1. \end{cases}$ 解得 $n=0$.

12. **解** 依题设,可令 $y=k_1x^2, z=\frac{k_2}{x^2}$($k_1$, k 均不为 0),且有

$$\begin{cases} k_1\cdot 2^2+\frac{k_2}{2^2}=340, \\ k_2-k_1=1275. \end{cases}$$

解得 $k_1=5, k_2=1280$.

若 $y=z$,则 $5x^2=\frac{1280}{x^2}$,解得 $x=\pm 4$.

因 $x^2=\frac{y}{5}=\frac{1280}{z}$,故 $z=\frac{6400}{y}$.

13. **解** $y=40-2x, z=x-10$. 所以

$$\begin{aligned} u &= 5x+4y+2z \\ &= 5x+4(40-2x)+2(x-10) \\ &= -x+140. \end{aligned}$$

又 y, z 均为非负实数,故

$$\begin{cases} 40-2x\geqslant 0, \\ x-10\geqslant 0. \end{cases}$$

解得 $10\leqslant x\leqslant 20$.

由于函数 $u=-x+140$ 是随着 x 的增加而减小的,所以当 $x=10$ 时,u 有最大值 130;当 $x=20$ 时,u 有最小值 120.

练习八

一、选择题

1. 用 $-x$ 代替 x,选(B).

2. 依题设,可知 $C(o,c), B(c,o), A(-2c,o)$. 于是 $c+(-2c)=-\frac{b}{a}$, $c.(-2c)=\frac{c}{a}$,相除得 $b=-\frac{1}{2}$. 选(C).

3. 抛物线的顶点坐标为 $(-k,k)$ 在直线 $y=-x$ 上. 选(B).

4. 依题设，可知 $a<0, b<0$，于是 $-\frac{b}{8a}<0, x=-\frac{b}{2a}<0$、抛物线的对称轴位于左半平面，与 y 轴交点在 y 轴的负半轴上，因此不过第一象限，选(A).

5. 令 $-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}=0$，解得 $x_1=-2, x_2=10$. 选(C)

二、填空题

6. 设抛物线与 x 轴两交点的坐标分别为 x_1, x_2，则 $x_1+x_2=-4(1-3m)$，$x_1x_2=-8m$，于是，有

$$
\begin{aligned}
(x_1-x_2)^2 &= (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16(1-3m)^2+32m \\
&= 144m^2-64m+16.
\end{aligned}
$$

当 $m=-\frac{-64}{288}=\frac{2}{9}$ 时，$(x_1-x_2)^2$ 取最小值.

7. 将函数解析式变为

$$(x-4)p+(y-2x^2-1)=0.$$

因 p 为任何实数，上式恒成立，故 $\begin{cases} x-4=0, \\ y-2x^2-1=0. \end{cases}$ 解得 $x=4, y=33$. 故抛物线过定点(4,33).

8. 抛物线与 x 轴的两交点 $(3k,0)$ 与 $(k+3,0)$ 之一在直线 $x=1$ 的左边，另一点在直线 $x=3$ 的右边，故有两种情形：

(ⅰ) $3k<1, k+3>3$，解得 $0<k<\frac{1}{3}$；

(ⅱ) $3k>3, k+3<1$，此时无解.

故 $0<k<\frac{1}{3}$.

9. 因抛物线开口向上，故 $a>0$，因对称轴在 y 轴左方，故 $-\frac{b}{2a}<0, b>0$. 因 $x=0$ 时，$y=c$，由图象知 $c<0$，因此 $abc<0$，①不成立. 由图象知 $x=1$ 时，$y>0$，即 $a+b+c>0$，而 $x=-1$ 时 $y<0$，即 $a-b+c<0$. 因此②成立.

10. 设抛物线与 x 轴两交点的横坐标为 x_1, x_2，则

$|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(m^2+4)^2+4(2m^2+12)=(m^2+8)^2$. 故当 $m=0$ 时，$|x_1-x_2|$ 取最小值 8.

三、解答题

11. **解** 因抛物线与 y 轴交于点(0,3)，故 $c=3$. 而 p 点纵坐标为 $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$，故

$$\frac{S_{\triangle AQB}}{S_{\triangle APB}}=\frac{3}{\frac{4ac-b^2}{4a}}=\frac{3}{3-\frac{b^2}{4a}}=\frac{3}{3-\frac{b^2}{4a}}=\frac{3}{4}.$$

故 $\qquad b^2=-4a.$ ①

设抛物线与 x 轴两交点的横坐标为 x_1、x_2，则

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(-\frac{b}{a})^2-\frac{6}{a}=10.$

故 $\qquad b^2-6a=10a^2.$ ②

由①,②联立，解得 $a=-1,b=\pm2$. 因此，所求抛物线为 $y=-x^2+2x+3$ 或 $y=-x^2-2x+3$.

12.**解** (1)依题意，可设 $y=a(x-1)(x-3)$，又抛物线上过点$(-1,16)$，故 $y=2(x-1(x-3)=2x^2-8x+6$.

(2) $y=2(x-2)^2-2$，顶点为$(2,-2)$. 依题设，有 $OA=1,AD=1,CD=2$. 设 $N(0,y)(y>0)$.

(ⅰ)当 N、A、C 三点共线时，$\Delta AON\backsim\Delta CDA$，有 $\frac{OA}{DA}=\frac{ON}{DC}$，可得 $y=2$，即 $N(0,2)$.

(ⅱ)当 N、A、C 不共线时，$\Delta AON\backsim\Delta CDA$，有 $\frac{OA}{DC}=\frac{ON}{DA}$，可得 $y=\frac{1}{2}$，即 $N(0,\frac{1}{2})$.

13.**解** 由 $a>b>c$，$a+b+c=0$，得 $a>0$，$c<0$，设 x_1,x_2 为方程 $ax^2+2bx+c=0$ 的两根，则 $x_1+x_2=-\frac{2b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$. 于是

$$l^2=|x_1-x_2|=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{4(b^2-ac)}{a^2}.$$

故
$$l=2\sqrt{\frac{b^2-4ac)}{a^2}}=2\sqrt{\frac{b^2+a(a+b)}{a^2}}$$
$$=2\sqrt{1+\frac{b}{a}+(\frac{b}{a})^2}$$
$$=2\sqrt{(\frac{b}{a}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}. \qquad ①$$

注意到 $a>b>-(a+b)$，$a>0$，故

$$1>\frac{b}{a}>-1-\frac{b}{a},$$

从而有 $-\frac{1}{2}<\frac{b}{a}<1$，再由①可得 $\sqrt{3}<l<2\sqrt{3}$.

14. **解** (1)若 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 6$，有

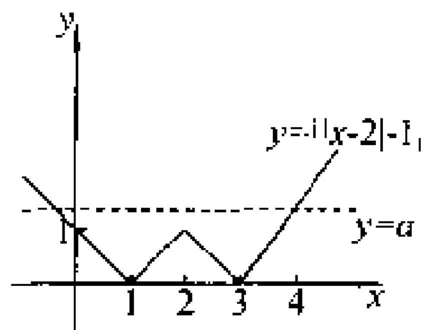
$$y=(x-2)(x-4)+(x-4)(x-6)+2(x-2)(x-6)$$
$$=4(x^2-8x+14)=4(x-4)^2-8;$$

若 $2\leqslant x\leqslant 4$，则

$$y=-(x-2)(x-4)+(x-4)(x-6)-2(x-2)(x-6)$$
$$=-2(x^2-6x+4)$$
$$=-2(x-3)^2+10;$$

若 $4\leqslant x\leqslant 6$，则

$$y=(x-2)(x-4)-(x-4)(x-6)-2(x-2)(x-6)$$
$$=-2(x-5)^2+10.$$



(第 14 题)

函数图象如图所示.

(2)利用函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=k$ 的交点个数，可知方程 $f(x)=k$ 的实数根的个数：当 $k<8$ 时无实数根；$k=8$ 时有 3 个实数根；当 $8<k<10$ 时有 6 个实数根；$k=10$ 时有 4 个实数根；$k>10$ 时有两个实数根.

练习九

一、选择题

1. 因 $0<\sin48°<1$，$0<\cos48°<1$，故 $\sin48°<\dfrac{\sin48°}{\cos48°}=\tan48°$，$\cos48°<\dfrac{\cos48°}{\sin48°}=\cot48°$. 于是

$$\sin48°+\cos48°<\tan48°+\cot48°;$$
$$\tan48°+\cos48°<\tan48°+\cot48°;$$
$$\cot48°+\sin48°<\cot48°+\tan48°.$$

选(A).

2. 当 $0°<\theta<45°$ 时，$0<\sin\theta<\cos\theta$，故 $\sin^2\theta<\cos^2\theta$，所以

$$\sin\theta+\sin^2\theta<\cos\theta+\cos^2\theta=1.$$

当 $45°\leqslant\theta<90°$ 时，$\sin\theta\geqslant\cos\theta>0$，$\sin^2\theta\geqslant\cos^2\theta$，故

$$\sin\theta+\sin^2\theta\geqslant\cos\theta+\cos^2\theta=1.$$

选(D).

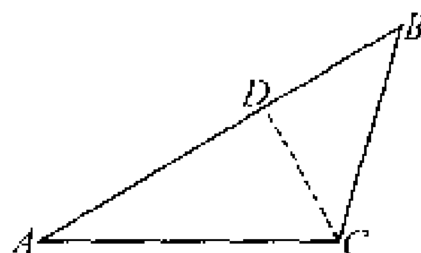
3.作 $CD\perp AB$，$BE\perp AC$，垂足分别为 D、E.因 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 D、E 分别在边 AB、AC 内部，又 $AC=1$，故

$$c=AB>AD=AC\cdot\cos A=AC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2},$$

又 $\angle A=60^\circ$，$\angle AEB=90^\circ$，故 $C=2AE<2AC=2$.

选(A).

4.如图，作 $CD\perp AB$，交 AB 于 D，则 $\angle ACD=90^\circ-\angle A=60^\circ$，进而知 $\angle BCD=\angle BCA-60^\circ=\angle B$.所以 $\angle BCD=\angle B=45^\circ$，$BD=CD=\frac{\sqrt{2}}{2}$.$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

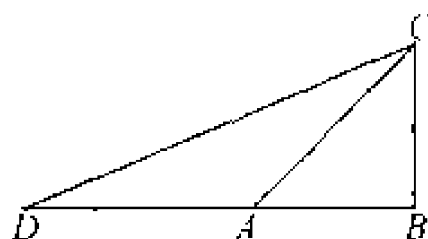


(第 4 题)

在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AD=\sqrt{3}\,CD=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，所以 $AB=AD+DB=\frac{\sqrt{6}\sqrt{2}}{2}a$.选(B).

5.作等腰直角三角形 ABC，设 $\angle ABC=90^\circ$，$AB=BC=1$.延长 BA 到 D，使 $AD=AC$，连 DC，则 $AD=AC=\sqrt{2}$，$\angle D=22.5^\circ$，$\angle DCB=67.5^\circ$，此时

$$\cot 67^\circ30'=\cot\angle DCB=\frac{CB}{DB}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$



(第 5 题)

二、填空题

6.根据韦达定理，有

$$\tan\alpha+\tan\beta=p, \qquad ①$$

$$\tan\alpha\cdot\tan\beta=q, \qquad ②$$

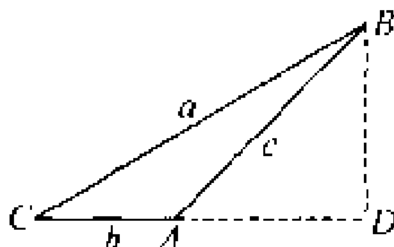
且

$$r=\cot\alpha+\cot\beta=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}, \qquad ③$$

$$s=\cot\alpha\cdot\cot\beta=\frac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}, \qquad ④$$

将①，②代入③，④，可得 $rs=\frac{p}{q^2}$.

7.如图，过 B 作 $BD\perp CA$ 交 CA 的延长线于 D，因 $\angle A=135^\circ$，$\angle B=15^\circ$，故 $\angle C=30^\circ$，则 $BD=\frac{a}{2}$.在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\angle BAD=45^\circ$，故 $AD=BD=\frac{a}{2}$，$AB=\frac{\sqrt{2}a}{2}$.在 Rt$\triangle BCD$ 中，$CD=BD\cdot\cot C=BD\cdot\cot 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.故



(第 7 题)

$$AC=CD-AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)a.$$

所以 $a:b:c=a:\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)a:\frac{\sqrt{2}}{2}a=2:(\sqrt{3}-1):\sqrt{2}$.

8. 作 $CH\perp AB$,垂足 H, CH 交 GF 于 P,则

$$CH=CA\cdot\sin\alpha=c\cos\alpha\cdot\sin\alpha.$$

因 $\triangle ABC\backsim\triangle GFC$,所以 $\frac{CP}{GF}=\frac{CH}{AB}$,即 $\frac{CH-GF}{GF}=\frac{CH}{AB}$,由合比定理可得 $\frac{CH}{GF}=\frac{CH+AB}{AB}$. 所以

$$GF=\frac{CH\cdot AB}{CH+AB}=\frac{c\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot c}{c\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha+c}=\frac{c\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha+1}.$$

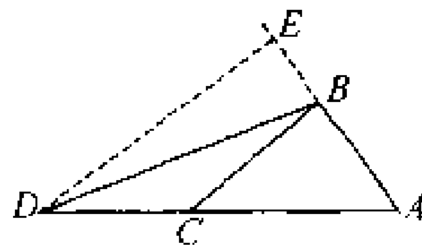
9. 过 D 作 $DE/\!/BC$ 交 AB 的延长线于 E,设 $AC=x$, $BE=y$,则 $\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CD}$,即 $\frac{1}{y}=\frac{x}{1}$,故 $y=\frac{1}{x}$. 因 $\angle BDE=\angle CBD=30°$,所以

$$DE=y\cot30°=\sqrt{3}y=\frac{\sqrt{3}}{x}.$$

在 Rt$\triangle ADE$ 中,根据勾股定理可得

$$(1+x)^2=AD^2=AE^2+DE^2=(1+\frac{1}{x})^2+(\frac{\sqrt{3}}{x})^2,$$

解得 $x=\sqrt[3]{2}$,即为 AC 的长度.



(第 9 题)

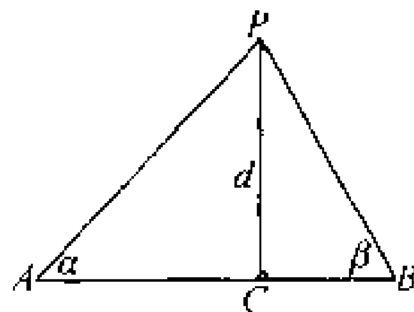
三、解答题

10. **证明** 如图,在 Rt$\triangle PAC$ 中, $AC=d\cot\alpha$,在 Rt$\triangle PBC$ 中, $BC=d\cot\beta$. 于是,

$$S=AB=AC+CB=d(\cot\alpha+\cot\beta).$$

所以
$$d=\frac{S}{\cot\alpha+\cot\beta}\leqslant D,$$

从而,有
$$\cot\alpha+\cot\beta\geqslant\frac{S}{D}.$$



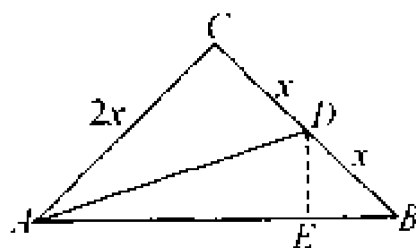
(第 10 题)

11. **证明** 如图,设 $BD=x$,则 $CD=x$, $AC=2x$, $AD=\sqrt{5}x$, $AB=2\sqrt{2}x$.

作 $DE\perp AB$ 交 AB 于 E,则 $DE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}x$. 故 $AE=\frac{3\sqrt{2}}{2}x$,于是

$$\sin\angle BAD=\frac{DE}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{10},$$

$\cos\angle BAD=\frac{AE}{AD}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.



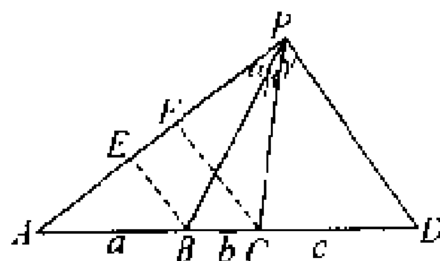
(第 11 题)

可得 $\sin\angle BAD+\cos\angle BAD=\frac{4\sqrt{10}}{10}$,

$\sin\angle BAD\cdot\cos\angle BAD=\frac{3}{10}$.

故 $\sin\angle BAD$ 与 $\cos\angle BAD$ 是所给方程的两根.

12. **证明** 如图,过 B、C 分别作 AP 的垂线,垂足为 E、F,则 $EB=PB\sin\alpha$, $FC=PC\sin(\alpha+\beta)$.



(第 12 题)

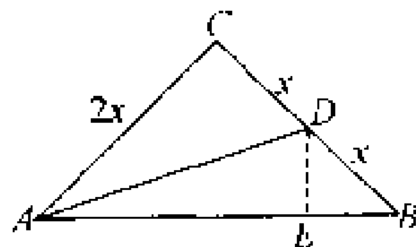
由 $BE\,/\!/\,CF$ 得 $\frac{AB}{AC}=\frac{BF}{CF}$,故

$\frac{a}{a+b}=\frac{PB\sin\alpha}{PC\sin(\alpha+\beta)}$,

$\frac{c}{b+c}=\frac{PC\sin r}{PB\sin(\beta+r)}$,

两式相乘,即得所证.

13. **解** 如图,设 $CD=\sin\alpha$, $CE=\cos\alpha$. 注意到 CE 为 $\triangle CBD$ 的中线, CD 为 $\triangle ACE$ 的中线,故



(第 13 题)

$2(a^2+\sin^2\alpha)=4\cos^2\alpha+\frac{4}{9}c^2$,

$2(b^2+\cos^2\alpha)=4\sin^2\alpha+\frac{4}{9}c^2$.

两式相加,并利用 $a^2+b^2=c^2$,可得 $c=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

14. **证明** 若任意三个顶点所构成的三角形的每个内角都不小于 45°,则对任意固定的一个顶点,六边形可分为以它为公共顶点的四个三角形,于是凸六边形中以该点为顶点的内角将 $\geqslant 4\times 45°=180°$,矛盾,所以必存在三个顶点 A、B、C 使 $\angle ABC<45°$,从而有 $\sin\angle ABC<\cos\angle ABC$.

练习十

1. **解** 令 $2x-\frac{1}{2}=t$, t 为整数,则

$$3x+1=3\times\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right)+1=\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}.$$

故

$$t\leqslant\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}<t+1,$$

解得 $-\frac{7}{2}\leqslant t<-\frac{3}{2}$. 当 $t=-3$ 时, $x=-\frac{5}{4}$; 当 $t=-2$ 时, $x=-\frac{3}{4}$.

2. **解** 令 $t=\{x\}$, $n=[x]$, 则 $n\geqslant 0, 0\leqslant t<1$, 有

$$n^2=(n+t)t<n+t<n+1.$$

可得 $0\leqslant n<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 故 $n=0,1$. 当 $n=0$ 时, $t=0$. 与 $x>0$ 矛盾; 当 $n=1$ 时, 有 $t^2+t=1$, 解得 $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 从而, 可得 $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3. **解** 原方程即 $[-1.77x]=-2x$, 故

$$-2x\leqslant -1.77<-2x+1,$$

解得 $0\leqslant x<\frac{100}{23}$, 满足要求的整数有 0,1,2,3,4, 共 5 个.

4. **证明** $x-y=([x]+\{x\})-([y]+\{y\})=\{x\}-\{y\}$, 因 $0\leqslant\{y\}<1$, $0\leqslant\{y\}<1$, 故 $-1<\{x\}-\{y\}<1$, 即 $|\{x\}-\{y\}|<1$, 所以 $|x-y|<1$.

5. **解** 因 $[x^3]$, $[x^2]$, $[x]$ 为整数, 故 $\{x\}-1$ 为整数. 又 $0\leqslant\{x\}<1$, 所以 $-1\leqslant\{x\}-1<0$, $\{x\}=0$, 这表明 x 为整数, 原方程可变为 $x^3+x^2+x=-1$, 即 $(x+1)(x^2+1)=0$, 解得 $x=-1$.

6. **证明** 因 $n>2$ 时,

$$A=\frac{n(n+1)}{4n-2}-\frac{n+1}{4}=\frac{4n(n+1)-(4n-2)(n+1)}{4(4n-2)}$$
$$=\frac{2n+2}{4(4n-1)},$$

且 $2n+2<4n-2$, 故 $0<A<\frac{1}{4}$. 于是, 有

$$\frac{n+1}{4}<\frac{n(n+2)}{4n-2}<\frac{n+1}{4}+\frac{1}{4},$$

可知 $\left[\frac{n(n+1)}{4n-2}\right]=\left[\frac{n+1}{4}\right]$.

7. **解** 显然 $x=n$ 是方程的一个根. 设 $1\leqslant x<n$, $m=[x]$, $r=\{x\}$, 则 $x=m+r(0\leqslant r<1)$, $x^2=m^2+2mr+r^2$, $[x^2]=m^2+[2mr+r^2]$, $x-[x]=r$, 代入原方程得

$$m^2+2mr+r^2-m^2-[2mr+r^2]=r^2,$$

即 $$2mr=[2mr+r^2].$$

可见, 当且仅当 $2mr$ 为整数时, $x=m+r$ 是方程的一个根, r 可取 $0,\frac{1}{2m},\frac{2}{2m},\cdots,\frac{2m-1}{2m}$ 共 $2m$ 个值. 在 $1\leqslant m<n$ 中, m 可取 $1,2,\cdots,n-1$. 因此, 解的总数连

同 $x=n$ 这一解，为

$$2(1+2+\cdots+(n-1)+1=n(n-1)+1=n^2-n+1.$$

8.**解** 令 $\frac{15x-7}{5}=n$ （n 为整数），则 $x=\frac{5n+7}{15}$，代入原方程得

$$\left[\frac{5+6\times\frac{5n+7}{15}}{8}\right]=n,$$

即
$$\left[\frac{30n+117}{120}\right]=n.$$

则
$$0\leqslant\frac{30n+117}{120}-n<1,$$

解得 $-\frac{1}{30}<n<\frac{117}{90}$. 所以 $n=0$ 或 1.

当 $n=0$ 时，$x=\frac{7}{15}$；当 $n=1$ 时，$x=\frac{4}{5}$.

9.**解** 由第一个方程知 $2(y-[y])$ 为整数，且不能为 0，注意到 $0\leqslant y-[y]<1$，故 $y-[y]=\frac{1}{2}$，同时 $[x]=2$. 由第二个方程知 $x-[x]=0$ 或 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，相应的 $[y]=4,5,6$. 故 $x=2$，$y=4\frac{1}{2}$；$x=2\frac{1}{3}$，$y=5\frac{1}{2}$；$x=2\frac{2}{3}$，$y=6\frac{1}{2}$.

10.**证明** (1)因 $(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$ 及 $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$，故

$$4n+1<(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2<4n+3.$$

记 $k=[\sqrt{4n+2}]$，则

$$k^2\leqslant 4n+1<(k+1)^2.$$

注意到任何一个平方数被 4 除后不能余 2 也不能余 3，故

$$k^2\leqslant 4n+1<4n+2<4n+3<(k+1)^2.$$

这表明 k 是 $\sqrt{4n+2}$，$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ 的整数部分，命题成立.

(2)因 $\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant\frac{x}{n}<\left[\frac{x}{n}\right]+1$，且 $n>0$，故 $n\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant x<n\left[\frac{x}{n}\right]+n$，因 n，$n\left[\frac{x}{u}\right]+n$ 都是整数，故 $n\cdot\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant[x]<n\left[\frac{x}{n}\right]+n$，即 $\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant\frac{[x]}{n}+n$ 都是整数，故 $n\cdot\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant[x]<n\left[\frac{x}{n}\right]+n$，即 $\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant\frac{[x]}{n}<\left[\frac{x}{n}\right]+1$，所以 $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$.

11.**解** 令 $t=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]=[n+2\alpha]+[2n+4\alpha]+[3n+$

$6\alpha]+[4n+8\alpha]$　$0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$，$n$ 为非负整数.

当 $0\leqslant\alpha<\frac{1}{8}$ 时，$T=10n$；当 $\frac{1}{8}\leqslant\alpha<\frac{1}{6}$ 时，$T=10n+1$；当 $\frac{1}{6}\leqslant\alpha<\frac{1}{4}$ 时，$T=10n+2$；当 $\frac{1}{4}\leqslant\alpha<\frac{1}{3}$ 时，$T=10n+4$；当 $\frac{1}{5}\leqslant\alpha<\frac{3}{8}$ 时，$T=10n+5$；当 $\frac{3}{8}\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ 时，$T=10n+6$. 因此，在前 1000 个自然数中每 10 个数中就有 6 个数满足条件，故共有 600 个数可满足要求.

12. 解　考察 $(k+1)^2-k^2=2k+1$. 当 $2k+1\geqslant1980$ 时，$[\frac{(k+1)^2}{1980}]$ 与 $[\frac{k^2}{1980}]$ 必不相等，换句话说，$k\geqslant990$ 时，$[\frac{990^2}{1980}]$，$[\frac{991^2}{1980}]$，…，$[\frac{1980^2}{1980}]$ 这 $1980-990+1=991$ 个数必在不相同；当 $2k+1<1980$，即 $1\leqslant k\leqslant989$ 时，任意相邻两项，或都相等，或后项比前项大 1，但不会出现后项比前项大于 1，即这 990 个数只能是 0，1，2，…，$[\frac{990^2}{1980}]=495$，因此，共有不同整数 $991+496-1=1486$ 个.

练习十一

一、填空题

1. 因 $2^{2001}=2^{3\times667}=(2^3)^{667}=8^{667}$，而 $8\equiv-1(\bmod 9)$，可知 $8^{667}\equiv-1\equiv8(\bmod 9)$，故所求余数为 8.

2. 因 $3^{2n}+1=(3^2)+1=9^n+1$，而 $9\equiv1(\bmod 8)$，$9^n\equiv1^n\equiv1(\bmod 8)$，故所求余数为 2.

3. 因 $19\equiv2(\bmod 17)$，故 $19^{1996}\equiv2^{1996}\equiv(2^4)^{499}\equiv16^{499}\equiv(-1)^{499}\equiv-1\equiv16(\bmod 17)$，所求余数为 16.

4. $x=1990(1+2+\cdots+1990)=995\times1990\times1991$. 因 $995\equiv5(\bmod 9)$，$1990\equiv1(\bmod 9)$，$1991\equiv2(\bmod 9)$，故 $995\times1990\times1991\equiv5\times1\times2\equiv1(\bmod 9)$，所求余数为 1.

5. 因 $2^{12}\equiv4096\equiv-4(\bmod 100)$，故

$2^{999}\equiv(2^{12})^{83}\cdot2^3\equiv(-4)^{83}\cdot2^3\equiv-(4^6)^{14}\cdot2\equiv-4^{14}\cdot2\equiv-(2^{12})^2\cdot2^5\equiv-(-4)^2\cdot2^5\equiv-2^9\equiv-512\equiv88(\bmod 100)$.

所求末两位数为 88.

二、解答题

6. **证明** $N-(4a_2+2a_1+a_0)=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}\times 100+(100a_2+10a_1+a_0)-(4a_2+2a_1+a_0)=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}\times 100+96a_2+8a_1=8(\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}\times 125+12a_2+a_1)$，可见 $8\mid N-(4a_2+2a_1+a_0)$. 又 $8\mid 4a_2+2a_1+a_0$，故 $8\mid N$.

7. **证明** 因为 $n\equiv -2\bmod(n+2)$，$n-1\equiv -3(\bmod(n+2))$，$n-2\equiv -4(\bmod(n+2))$，…，$2\equiv -n(\bmod(n+2))$，所以 $n^{1995}\equiv(-2)^{1995}(\bmod(n+2))$，$(n-2)^{1995}\equiv(-4)^{1995}((\bmod n+2))$，…，$2^{1995}\equiv(-n)^{1995}\bmod(n+2)$. 以上$(n-1)$个等式两边分别相加，得

$$2(2^{1995}+3^{1995}+\cdots+n^{1995})\equiv 0\bmod(n+2),$$

即
$$2(1^{1995}+2^{1995}+3^{1995}+\cdots+n^{1995})\equiv 2(\bmod(n+2)),$$

又由于 n 为奇数，则$(2,n+2)=1$. 于是

$$1^{1995}+2^{1995}+3^{1995}+\cdots+n^{1995}\equiv 1(\bmod(n+2)).$$

因此，$1^{1995}+2^{1995}+3^{1995}+\cdots+n^{1995}$不能被 $n+2$ 整除.

8. **证明** 注意到

$$1^4\equiv 2^4\equiv 3^4\equiv 4^4(\bmod 5),$$

设 $n=4k+r$（k 为非负整数），$r=0,1,2,3$，则

$$1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1^r+2^r+3^r+4^r(\bmod 5).$$

容易验证 $r=0$ 时，$5\nmid 1^r+2^r+3^r+4^r$；$r=1,2,3$ 时，$5\mid 1^r+2^r+3^r+4^r$. 故命题成立.

9. **解** 记 $n=\overline{30x0y03}$，则

$$\begin{aligned}n&\equiv 3\cdot 10^6+x\cdot 10^4+y\cdot 10^2+3\\&\equiv 3+3x+9y+3\\&\equiv 3(2+x+3y)(\bmod 13).\end{aligned}$$

当且仅当 $13\mid 2+x+3y$ 时，$13\mid n$. 注意到

$$2+x+3y\leqslant 2+9+3\times 9=38,$$

故 $2+x+3y=13$ 或 $2+x+3y=26$，可得$(x,y)=(8,1),(5,2),(2,3),(9,5),(6,6),(3,7),(0,8)$.

以下 7 个数满足题设要求：3080103，3050203，3020303，3090503，3060603，3030703，3000803.

10. **解** $N=(1\times 3\times 5\times 7)\times(9\times 11\times 13\times 15)\times\cdots\times(1993\times 1995\times 1997\times 1999)$.

上式每一个括号内的数都形如$(8k+1)(8k+3)(8k+5)(8k+7)$（k 为非负整数），而 $8k+1\equiv 1(\bmod 8)$，$8k+3\equiv 3(\bmod 8)$，$8k+5\equiv 5(\bmod 8)$，$8k+7\equiv 7$

(mod8),故

$$(8k+1)(8k+3)(8k+5)(8k+7)\equiv 1\times 3\times 5\times 7\equiv 1(\bmod 8),$$

因此,$N\equiv 1(\bmod 8)$.

记 N 的末三位数为 M,则 $M\equiv N\equiv 1(\bmod 8)$,且因 $125\mid N$,可知 $125\mid M$.设 $M=125q$,$1\leqslant q<8$,则 $125q\equiv 1(\bmod 8)$,将 $q=1,2,\cdots,7$ 代入上式可知仅有 $q=5$ 时才满足.故 $M=125\times 5=625$.即为所求.

11. **解** 若 $n=4k$,则

$$\begin{aligned}S&\equiv 6^{4k}+7^{4k}+8^{4k}+9^{4k}\\&\equiv 6+1+6+1\\&\equiv 4(\bmod 10).\end{aligned}$$

若 $n=4k+1$,则

$$\begin{aligned}S&\equiv 6^{4k+1}+7^{4k+1}+8^{4k+1}+9^{4k+1}\\&\equiv 6+7+8+9\equiv 0(\bmod 10);\end{aligned}$$

若 $n=4k+2$,则

$$\begin{aligned}S&\equiv 6^{4k+2}+7^{4k+2}+8^{4k+2}+9^{4k+2}\\&\equiv 6+9+4+1\equiv 0(\bmod 10);\end{aligned}$$

若 $n=4k+3$,则

$$\begin{aligned}S&\equiv 6^{4k+3}+7^{4k+3}+8^{4k+3}+9^{4k+3}\\&\equiv 6+3+2+9\equiv 0(\bmod 10).\end{aligned}$$

综上所述,因为 $S\not\equiv 0(\bmod 10)$,所以满足题设要求是 $n=4k$(k 为正整数).

12. **证明** 5个偶数字肯定不能出现在绝对素数中.假若一绝对素数中含有多于3个的不同数字,则必由数字1,3,7,9组成.但 $1379\equiv 0(\bmod 7)$,$3179\equiv 1(\bmod 7)$,$9137\equiv 2(\bmod 7)$,$7913\equiv 3(\bmod 7)$,$1379\equiv 4(\bmod 7)$,$3197\equiv 5(\bmod 7)$,$7139\equiv 6(\bmod 7)$.对于任意自然数 M,,分别将1379,3179,9137,7913,1397,3197,7139接在 M 后面,其中必有一个是7的倍数,矛盾,故命题成立.

练习十二

一、填空题

1.**解** 连结 CE 并延长与 BA 的延长线交于点 F,因 AE 平分 $\angle CAF$,故 $\angle CAE=\angle FAE$.又 AC 为直径,$\angle AEC=90^\circ$,故 $AE\perp CF$,$AF=AC$,E 为 CF 中点.又 D 为 BC 中点,于是

$$DE=\frac{1}{2}BF=\frac{1}{2}(AB+AF)=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}(8+6)=7.$$

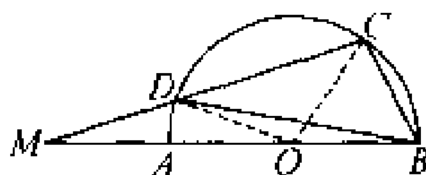
2.**解** 连接 BO.延长交⊙O 于 C',连结 AC',则$\angle BAC'=90°$.且$\angle C'=\angle C$,故

$$\sin C=\sin C'=\frac{AB}{BC'}=\frac{1}{2}.$$

3.**解** 依题设,O 到$\triangle ABC$ 各边距离相等,即为内角平分线的交点,故

$$\angle BOC=180°-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=180°-\frac{1}{2}(180°-\angle A)=125°.$$

4.**解** 连 CO、DO,$\angle DOC=2\angle CBD=80°$,$\angle MCO=\frac{1}{2}(180°-\angle DOC)=50°$.于是$\angle COB=\angle M+\angle MCO=20°+50°=70°$.进而可知$\angle BDC=\frac{1}{2}\angle BOC=35°$.



(第4题)

5.**解** 作 $OM\perp BC$,M 为垂足,交 EF 于 N,则 $BM=MC=\frac{1}{2}BC=3$.因四边形 $AMND$ 是矩形,故 $AM=DN$,即 $DE+EN=AB+BM$,于是 $EN=4$.

连结 OB、OE,设⊙O 的半径为 R,则

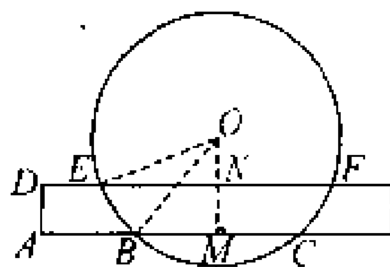
$$OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=\sqrt{R^2-3^2},$$

$$ON=\sqrt{OE^2-EN^2}=\sqrt{R^2-4^2}.$$

又 $MN=OM-ON=AD=1$,故

$$\sqrt{R^2-9}-\sqrt{R^2-16}=1.$$

解得 $R=5$.即⊙O 的半径为 5.



(第5题)

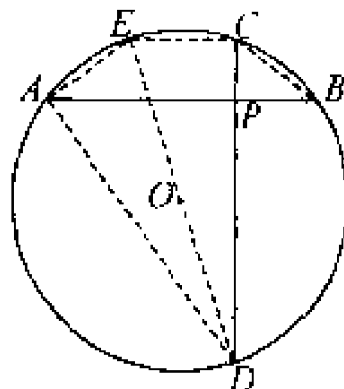
二、解答题

6.**证明** 连结 BF,因 AB 为⊙O 直径,故$\angle AFB=90°$,又 $AB\perp CD$,故 $\mathrm{Rt}\triangle APE\backsim\mathrm{Rt}\triangle AFB$,有$\frac{AP}{AF}=\frac{AE}{AB}$.即 $AP\cdot AB=AE\cdot AF$.连结 BD,则 $AD^2=AP\cdot AB$.因此 $AD^2=AE\cdot AF$.

7.**证明** 如图,连结 BC、AD.因 $AB\perp CD$,故$\angle CPB=\angle APD=90°$.根据勾股定理得

$$PA^2+PD^2=AD^2,$$

$$PB^2+PC^2=BC^2,$$



(第7题)

过点 D 作直径 DE，连结 AE、CE，则 $\angle DAE = \angle ECD = 90°$. 于是 $CE // AB$，$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{EA}$，可知 $BC = AE$.

设⊙O 的半径为 R，则

$$AD^2 + BC^2 = AD^2 + AE^2 = DE^2 = 4R^2.$$

故 $$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AD^2 + BC^2 = 4R^2(\text{定值}).$$

8. **证明** 连结 AC、BC. 则 $\angle DAC = \angle EBC$. 因 OC 垂直平分 AB，故 $AC = BC$，又 $AD = BE$，故 $\triangle ADC \cong \triangle BEC$，有 $CD = CE$，$\angle DCA = \angle ECB$，则 $\angle DCE = \angle ACB - \angle ECB + \angle DCA = \angle ACB = 90°$. 故 $\triangle CDE$ 为等腰直角三角形.

9. **证明** 连结 CB、ED，因 $\angle CBA \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle BCE \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BE}$，故 $\angle CBA + \angle BCE \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BE})$，可知 $\angle CGF \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BE})$，因 OC 垂直平分 AB，故 $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$. 于是 $\angle CGF \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{BE}) \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{CBE}$. 又 $\angle D \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{CBE}$，故 $\angle CGF = \angle D$. 于是 $\triangle CFG \backsim \triangle CED$，有 $\frac{CF}{CE} = \frac{CG}{CD}$，即 $CF \cdot CD = CG \cdot CE$.

10. **证明** 作直径 DF，连结 FB、FC，则 $FB \perp BD$. 因 $AC \perp BD$，所以 $FB // AC$，有 $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{FC}$，$AB = FC$. 因 OE 是 $\triangle DFC$ 的中位线，故 $OE = \frac{1}{2}FC = \frac{1}{2}AB$.

11. **证明** 因 $\angle APC = \angle ABC = \angle ACB = 60°$，故 $\triangle ACD \backsim \triangle APC$，有 $\frac{AC}{AP} = \frac{AD}{AC}$，即 $AC^2 = AP \cdot AD$，因 $\angle PBC = \angle PAC$，$\angle APB = \angle APC = 60°$，故 $\triangle PBD \backsim \triangle PAC$，有 $\frac{PB}{AP} = \frac{PD}{PC}$，所以 $PB \cdot PC = AP \cdot PD$. 于是

$$AC^2 + PB \cdot PC = AP \cdot AD + AP \cdot PD = AP(AD + PD) = AP^2.$$

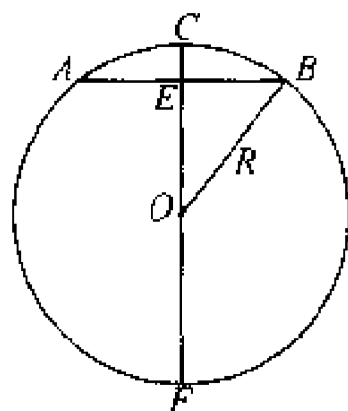
12. **解** 过 O 作 $CF \perp AB$，交于 E. 因 $EB = \frac{1}{2}AB = \frac{l}{2}$，$EF = FC - CE = D - h$，且 $BE^2 = CE \cdot EF$，故

$$(\frac{l}{2})^2 = h(D - h).$$

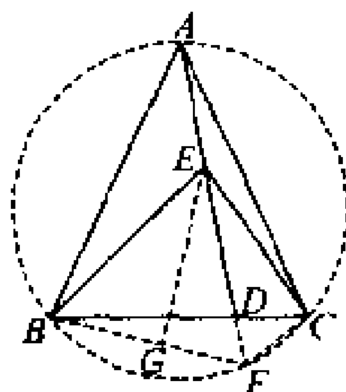
解得 $D = \frac{l^2 + 4h^2}{4h}$.

若 $l = 220\text{mm}$，$h = 50\text{mm}$，则

$$D = \frac{220^2 + 4 \times 50^2}{4 \times 50} = 292(\text{mm}).$$



（第 12 题）



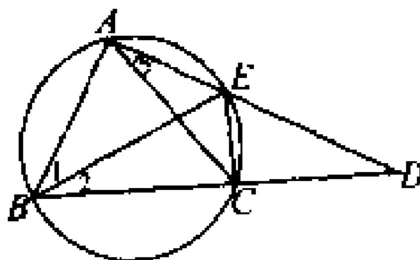
(第13题)

13. **证明** 延长 AD 与 ΔABC 外接圆交于点 F，连结 CF 和 BF，则 $\angle BFA=\angle BCA=\angle ABC=\angle AFC$，即 $\angle BFD=CFD$，FD 平分 $\angle BFC$，因此，$\frac{BF}{FC}=\frac{BD}{DC}$.

因 $\angle BEF=\angle BAC$，$\angle BFE=\angle BCA$，故 $\angle FBE=\angle BFE$，有 $BE=FE$. 作 $EG\perp BF$，垂足 G，则 G 为 BF 中点，且可得 $\angle GEF=\frac{1}{2}\angle BEF=\angle CEF$，$\Delta EGF\cong\Delta ECF$，有 $GF=CF$. 故 $BF=2CF$. 从而得 $BD=2CD$.

练习十三

1. **证明** (1)如图，因 $AE=EC$，故 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EC}$，$\angle 1=\angle 2$. 又 $AB=AC$，有 $\angle ABC=\angle ACB$，即 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle D$，而 $\angle 2=\angle 3$，所以 $\angle 1=\angle D$，进而知 $\angle 2=\angle D$，有 $ED=EB$.

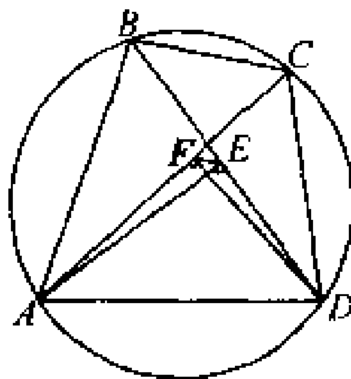


(第1题)

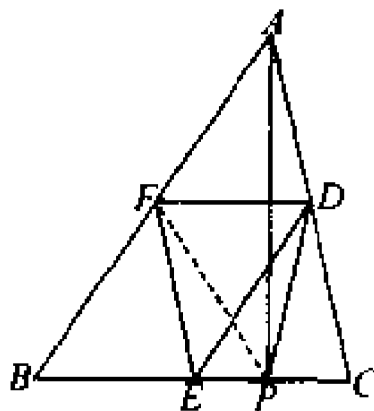
(2) 因 $\angle ACE=\angle 1=\angle D$，故 $\Delta AEC\backsim\Delta ACD$，有 $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}$，即 $AC^2=AE\cdot AD$. 又 $\angle 3=\angle 2=\angle D$，有 $AC=CD$，所以 $CD^2=AE\cdot AD$.

2. **证明** 连结 AC. 因 $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{MC}$，有 $\angle BAM=\angle CAM$，$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}$. 同理 $\frac{AD}{AC}=\frac{DF}{FC}$. 又 $AB=AD$，故 $\frac{BE}{EC}=\frac{DF}{FC}$，可知 $EF\parallel BD$.

3. **证明** 如图 因 $\angle AED=\angle DFA=90°$，故 A、D、E、F 四点共圆，$\angle BEF=\angle CAD$. 又 $\angle CBD=\angle CAD$，故 $\angle BEF=\angle CBD$，可知 $EF\parallel BC$.



(第3题)



(第4题)

4. **证明** 如图，连结 FP，因 $AP\perp BC$，$AD=DC$，故 $PD=\frac{1}{2}AC=AD$，有

$\angle APD=\angle PAD$.同理$\angle APF=\angle PAF$.所以$\angle FAD=\angle FPD$.

因 $EF/\!/AC$,$ED/\!/AB$,故四边形 $EDAF$ 为平行四边形,有$\angle FAD=\angle FED$.所以,$\angle FED=\angle FPD$,四边形 $EFDP$ 有外接圆.

5.证明　(1)因

$$\angle OEB+\angle OFB=180^\circ,$$

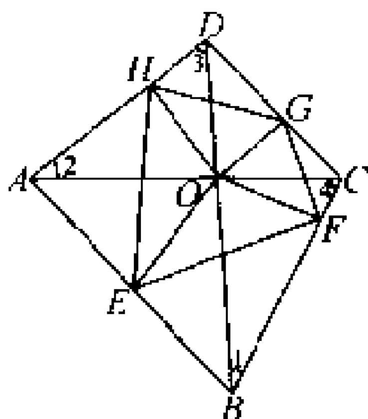
故 O、E、F、B 四点共圆,$\angle OEF=\angle 1$,
同理$\angle OEH=\angle 2$.故

$$\angle HEF=\angle HEO+\angle OEF=\angle 1+\angle 2.$$

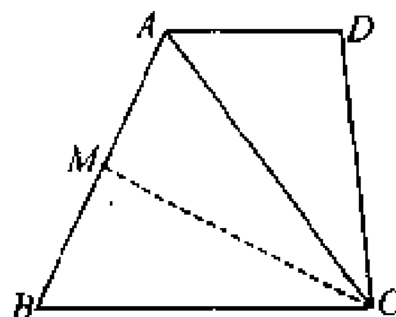
同理$\angle HGF=\angle 3+\angle 4$.
因 $AC\perp BD$,故$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=90^\circ$,所以

$$\angle HEF+\angle HGF=\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180^\circ,$$

四边形 $EFGH$ 内接于圆.



(第5题)



(第6题)

6.解　当 $a\neq b$ 时,四边形 $ABCD$ 一定有外接圆,如图.

若 $a>b$,在 AB 上截取 $AM=AD$,连结 CM,则 $\triangle AMC\cong\triangle ADC$,有$\angle AMC=\angle D$,$CM=CD$.又 $BC=CD$,故 $CM=CB$.因$\angle AMC+\angle BMC=180^\circ$,故$\angle D+\angle B=180^\circ$,四边形 $ABCD$ 有外接圆.

同理可证,当 $a<b$ 时,结论也成立.

而 $a=b$,即 $AB=AD$ 时,$\triangle ABC\cong\triangle ADC$.则$\angle B=\angle D$,又$\angle B$与$\angle D$不一定是直角,因此,四边形 $ABCD$ 不一定是圆内接四边形,即不一定有外接圆.

综上所述,$a\neq b$ 时,四边形 $ABCD$ 一定有外接圆.

7.证明　设 $\triangle ABC$ 的边长为 $3a$,则 $CD=2a$,$CE=a$,作 $DE'\perp AC$,垂足 E',因$\angle DCE=60^\circ$.故

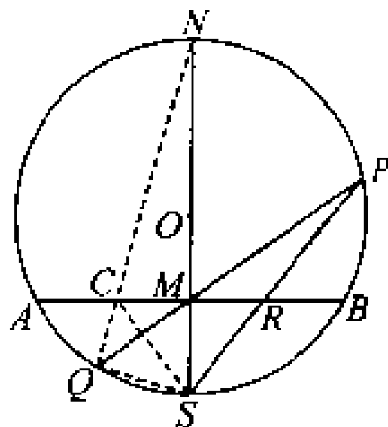
$$CE'=CD\cos60^\circ=a,$$

E 与 E' 重合，即$\angle DEC = 90°$. 又 $\triangle ADB \cong \triangle BEC$，可知$\angle ADB = \angle BEC$，故 C、E、P、D 四点共圆，有$\angle DPC = \angle DEC = 90°$.

8. **证明** 作$\angle ECF = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC$，$CF$ 交 BD 于 F. 又 CF 在$\angle DCE$ 内部，F 在线段 DB 内部，则 B、C、F、E 四点共圆. 因$\angle ACB > \angle ABC$，所以$\angle EBC < \angle FCB$，从而有 $CE < BF < BD$.

9. **证明** 取 BD 中点 M，连 FM、AM，则有$\angle C = \angle ADE = \angle B$，所以 $\triangle ABD \backsim \triangle ADE$，得$\frac{AD}{AE} = \frac{BD}{DE}$. 又 $DF = FE$，$BM = MD$，则$\frac{AD}{AE} = \frac{MD}{EF}$，$\triangle AMD \backsim \triangle AFE$，故$\angle AFE = \angle AMD$，$A$、$M$、$D$、$F$ 四点共圆，从而有$\angle MFA = 90°$. 而 $MF /\!/ BE$，所以 $AF \perp BE$.

10. **证明** 如图，连结 NQ，交 AB 于 C，连结 SQ、CS. 因 $AB \perp NS$，有$\angle AMS = 90°$，又 NS 为直径，有$\angle NQS = 90°$，故 C、Q、S、M 四点共圆，CS 为直径，$CS > MQ$（MQ 不能为直径），且有$\angle CQM = \angle CSM$. 又$\angle NQP = \angle NSP$，故$\angle CSM = \angle NSR$，$\text{Rt}\triangle CMS \cong \text{Rt}\triangle RMS$，有 $CS = RS$. 所以 $RS > MQ$.



(第 10 题)

11. **解** (1) 因 $BE \perp AC$，$CF \perp AB$，有$\angle BFC = \angle BEC = 90°$，故 B、F、E、C 四点共圆. 同理 E、F、G、H 四点共圆，A、G、K、H 四点共圆，连 AK、AO、GH、EF，则

$$\angle GAK = \angle GHK = \angle GEF = 90° - \angle GFE = 90° - \angle BCE,$$

又$\angle AOB = 2\angle BCE$，故$\angle BAO = 90° - \angle BCE$，有$\angle GAK = \angle BAO$，可知 AK 与 AO 重合.

(2)设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，则 $AK = KO = \frac{R}{2}$. 连结 GH、EF，则$\angle AKG = \angle AHG = \angle AFE = \angle ACB$，过 O 作 $OP \perp AB$，垂足 P，则$\angle AOP = \angle ACB$，于是 $AB = 2AP = 2AO\sin\angle AOP = 2R\sin\angle ACB$，所以

$$AK = \frac{AG}{\sin\angle AKG} = \frac{AG}{\sin\angle ACB}$$

$$= \frac{AE \cdot \cos\angle BAC}{\sin\angle ACB} = \frac{AB\cos^2\angle BAC}{\sin\angle ACB}$$

$$= 2R\cos^2\angle BAC.$$

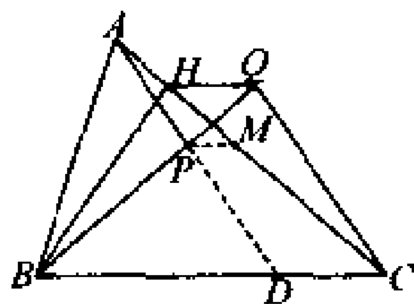
所以$\frac{R}{2} = 2R\cos^2\angle BAC$，可得 $\cos^2\angle BAC = \frac{1}{4}$. 又 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所

以 $\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，可得$\angle BAC=60°$. 即为所求.

12. **证明** 如图，不妨设$\angle BAC\geqslant\angle CBA$，$P$ 在 BQ 上. 延长 AP 交 BC 于 D. 依题设，A、D 关于 BQ 对称，P 为 AD 为中点，又 M 为 AC 中点，故 $PM\parallel BC$，$\angle QPM=\angle QBC$. 因 $BH\perp HC$，$BQ\perp QC$，故 B、C、Q、H 四点共圆，于是

$$\angle QHC=\angle QBC=\angle QPM,$$

可知 H、M、P、Q 四点共圆.



（第 12 题）

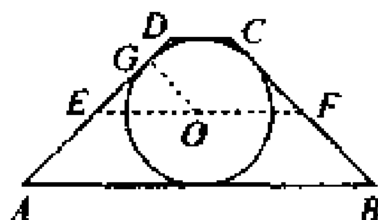
练习十四

一、填空题

1. 如图，过 O 作 $EF\parallel AB$，交 AD、BC 于 E、F. 连结 OG，则 $AB\parallel EF\parallel DC$，$EF$ 为梯形中位线，梯形高为 13 厘米. 于是，有

$$S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}(AB+CD)\times 13=EF\times 13,$$

解得 $EF=\frac{169\sqrt{2}}{13}=13\sqrt{2}$(cm)，可知 $OE=\frac{13\sqrt{2}}{2}$(cm).



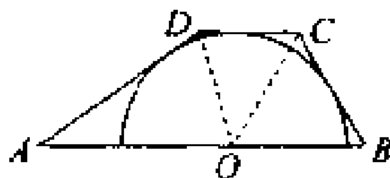
（第 1 题）

在 Rt△EOG 中，

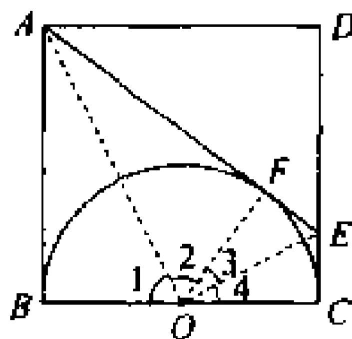
$$\sin\angle OEG=\frac{OG}{EO}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故$\angle OEG=45°$. 即梯形中较小底角为 45°.

2. 如图，连结 OC、OD. 在△AOD 中，AO、AD 上的高均等于⊙O 半径，故 $AO=DA$. 同理，$BO=BC$. 故 $AB=BC+DA=5$.



（第 2 题）



（第 3 题）

3. 如图，连结 OE，OF，AO. 因 AB、AF、DC 为半圆的切线，故$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，$AB=AF$、$EC=EF$. 可得$\angle AOE=90°$. 又 $OF\perp AE$，故 $OF^2=AF\cdot EF$. 设 $AB=2a$，则 $EF=\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}$，进而知 $AE=\frac{5}{2}a$，$DE=\frac{3}{2}a$. 所以
$DE:AE=3:5$.

4. 过 A 作 $AQ\parallel BC$，交 NM 的延长线于 Q，则$\frac{AP}{PC}=\frac{AQ}{CN}$. 又$\angle AQM=\angle MNC$，$\angle AMQ=\angle DMN$，$\angle DMN=\angle CNM$，所以$\angle AQM=\angle AMQ$，可知 $AQ=AM$. 于是

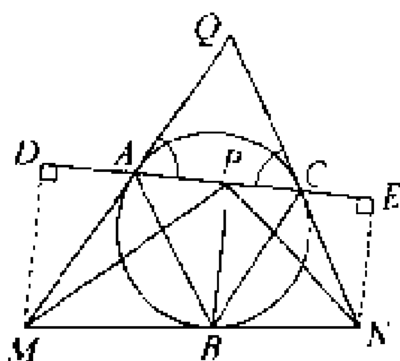
$$PC:AP=CN:AQ=CN:AM=CE:AF=3:5.$$

二、解答题

5. **证明** 连结 BC，由 AB 为$\odot O$ 直径知$\angle ACB=90°$，有 $AD\perp BC$. 又 BD 为$\odot O$ 切线，有 $BD\perp AB$，所以$\angle ABC=\angle ADB$. 因$\angle ABC=\angle AEC$，故$\angle ADB=\angle AEC$，可知 E、F、D、C 四点共圆，所以$\angle ECF=\angle EDF$.

6. **证明** 连结 NC、DC. 因 A、C 关于 BD 对称，故$\angle CNQ=\angle ANQ$. 依题设 PA 平分$\angle TAD$，MA 平分$\angle TAB$，故$\angle MAP=45°$. 又$\angle PDQ=45°$，所以$\angle MAP=\angle PDQ$. 注意到$\triangle ANQ$ 与$\triangle DPQ$ 中，$\angle AQN=\angle DQP$，故$\angle ANQ=\angle DPQ$. 于是$\angle CNQ=\angle DPQ$，可知 P、Q、N、C 四点共圆. 同理可证 M、N、Q、C 四点共圆. 所以 P、Q、N、M、C 五点共圆，即五边形 $PQNMC$ 内接于圆.

7. **证明** 过 M、N 分别作 AC 的垂线 MD、NE，垂足 D、E(如图).



(第 7 题)

因$\angle DAM=\angle QAC$，$\angle ECN=\angle QCA$，而$\angle QAC=\angle QCA$，故$\angle DAM=\angle ECN$，$\mathrm{Rt}\triangle DAM\backsim\mathrm{Rt}\triangle ECN$，有 $\frac{MD}{NE}=\frac{MA}{NC}$. 注意到 $MA=MB$，$NC=NB$，故 $\frac{MD}{NE}=\frac{MB}{BN}$. 又 $MD\parallel BP\parallel NE$，故$\frac{MB}{NB}=\frac{DP}{PE}$. 所以$\frac{MD}{NE}=\frac{DP}{EP}$，进而，有$\mathrm{Rt}\triangle MDP\backsim\mathrm{Rt}\triangle NEP$，$\angle DMP=\angle ENP$. 因$\angle MPB=\angle DMP$、$\angle NPB=\angle ENB$，所以$\angle MPB=\angle NPB$，即 BP 平分$\angle MPN$.

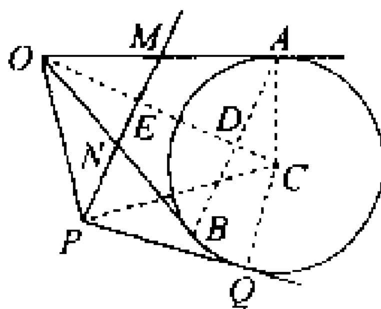
8. **证明** 如图连结 CO、CA、AB、PC、CQ. 设 MN、AB 分别交 OC 于 E、D，则 CO 垂直平分 AB. 又 MN 为$\triangle OAB$ 的中位线，$MN\parallel AB$，故 $OE=ED$，$MN\perp OC$. 所以

$PC^2-PO^2=(PE^2+CE^2)-(PE^2+OE^2)=CE^2-OE^2=(CE+OE)(CE-OE)=CO\cdot CD$.

在 Rt$\triangle AOC$ 中，$AC^2 = CO \cdot CD$，代入上式，有

$$PC^2 - PO^2 = AC^2 = QC^2 = PC^2 - PQ^2.$$

所以 $PQ = PO$.



（第 8 题）

9. **解** 连结 OE、OF、OC. 因 CE、CF、A_1B_1 均是 $\odot O$ 的切线，故 $B_1F = B_1F$，$A_1H = A_1E$，$CF = CE$，可得

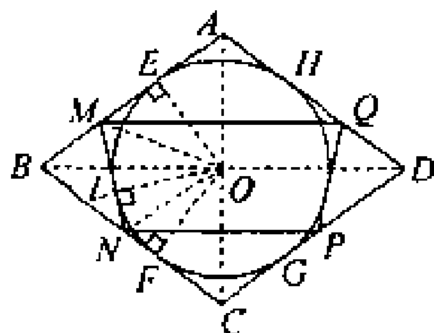
$\triangle A_1B_1C$ 的周长 $= CB_1 + B_1H + HA_1 + A_1C = CF + CE = 2CF = 8$.

所以 $CF = 4$.

因 $\angle FOC = \frac{1}{2}\angle FOE = \angle EGF$，故在 Rt$\triangle OFC$ 中，

$$\tan\angle FOC = \frac{FC}{OF} = \frac{4}{OF} = \frac{4}{3},$$

求得 $OF = 3$.



（第 10 题）

10. **证明** 如图，分别连结 AC、BD，交于 O，O 为菱形 $ABCD$ 的内切圆圆心. 设 MN 与$\odot O$ 切于 L，分别连结 OE、OM、OL、ON、OF，并设 $\angle MOL = \alpha$，$\angle LON = \beta$，$\angle ABO = \varphi$，则易知$\angle EOM = \alpha$，$\angle FON = \beta$，$\angle EOF = 2\alpha + 2\beta = 180° - 2\varphi$，故

$$\angle BON = 90° - \varphi - \beta = \alpha,\ \angle CNO = \angle NBO + \angle BON = \varphi + \alpha = \angle AOM.$$

又$\angle OCN = \angle MAO$，故$\triangle OCN \backsim \triangle MAO$，有

$$AM \cdot CN = CO \cdot AO.$$

同理可证 $$AQ \cdot CP = CO \cdot AO.$$

所以 $$AM \cdot CN = AQ \cdot CP.$$

又因$\angle MAQ = \angle PCN$，所以$\triangle AMQ \backsim \triangle CPN$，有$\angle AMQ = \angle CPN$，可知 $MQ \parallel NP$.

11. **解** 令 A、C 分别为 K 和 J 在他们的视线被挡住时的位置，B、D 为他们首次再看见彼此时的位置（如图）.

令 P 为 AC 延长线与 BD 延长线的交点，这两条直线与建筑物相切，且 $AC \perp AB$. 令 O 为建筑物的中心，E 为建筑物与 AC 的切点，t 为 K 从 A 到 B 所用的时间（秒），则 $AB = 3t$，$CD = t$，$CE = EA = 100$，$OE = 50$. 因 $CD \parallel AB$，故$\frac{AB}{CD} = \frac{PA}{PC}$，有

$$\frac{3t}{t} = \frac{200 + PC}{PC},$$

所以 $PC=100$.

令 G 为建筑物与 DB 的切点，连结 OG，则 $OG\perp BD$. 延长 EO 交 BD 于 F，则 EF 为梯形 $ABDC$ 的中位线，所以 $EF\parallel AB$，因

$$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)=2t,$$

故 $OF=EF-EO=2t-50$.

由 $\angle GFO=\angle ABP$ 得 $\mathrm{Rt}\triangle GFO\backsim\mathrm{Rt}\triangle ABP$，有 $\frac{GF}{AB}=\frac{OG}{PA}$，

(第 11 题)

所以 $GF=\frac{OG\cdot AB}{PA}=\frac{t}{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OGF$ 中，$OG^2+GF^2=OF^2$. 即

$$50^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=(2t-50)^2.$$

解得 $t=\frac{160}{3}$. 分子与分母的和为 163.

12. **证明** (1)如图在射线 AB 上截取 $AM'=AC$，则

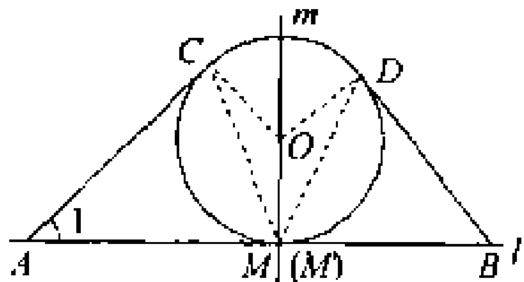
$$BM'=AM'-AB=AC-(AC-BD)=BD.$$

延长 BD 交 AC 于 E，连结 OC、OD、CM'、DM'，则 $OD\perp BE$，$OC\perp AC$，所以 O、C、E、D 四点共圆，有 $\angle AEB=\angle COD$.

(第 12 题(1))

$$\begin{aligned}\angle CM'D&=\angle CM'A-\angle DM'B\\&=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 1)-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 2)\\&=\frac{1}{2}(\angle 2-\angle 1)=\frac{1}{2}\angle AEB=\frac{1}{2}\angle COD.\end{aligned}$$

可知点在 M' $\odot O$ 上. 因 $BD=BM'$，$OD=OM'$，$OB=OB$. 所以 $\triangle ODB\cong\triangle OM'B$. 有 $\angle OM'B=\angle ODB=90^\circ$. 因此 ℓ 与 $\odot O$ 相切.



(第 12 题(2))

(2)如图在 AB 上截取 $AM'=AC$，则

$$BM'=AB-AM'=(AC+BD)$$

$AC=BD$. 连结 CM'、DM'、CO、DO，则 $\angle CM'A=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle CAM')$，$\angle DM'B=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle DBM')$. 所以

$\angle CM'D = 180° - (\angle CM'A + \angle DM'B) = \frac{1}{2}(\angle CAM' + \angle DBM')$.

因 O、C、A、M 四点共圆，O、D、B、M 四点共圆，故 $\angle COD = \angle CAM' + \angle DBM'$，于是 $\angle CM'D = \frac{1}{2}\angle COD$，点 M' 在⊙O 上.

同(1)可证 $OM' \perp AB$，故 ℓ 与⊙O 相切.

练习十五

一、填空题

1. 设两圆半径分别为 R、$r(R>r)$. 依题设，有

$$\begin{cases} R+r=8, & ① \\ (R+r)^2=2(R-r)^2. & ② \end{cases}$$

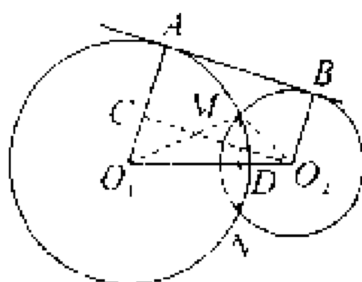
由①、②可解得 $R=4+2\sqrt{2}$，$r=4-2\sqrt{2}$.

2. 连结 AB、O_1O_2、AO_1、AO_2，则 O_1O_2 垂直平分 AB. 连结 O_1B，则 $\angle AO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle C$，$\angle AO_2O_1 = \angle D$，故 $\triangle AO_1O_2 \backsim \triangle ACD$，有 $\frac{AC}{AD} = \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{5}{8}$.

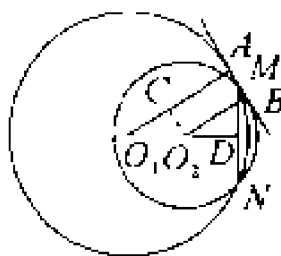
3. 如图(1)，设 AB 是两圆的公切线，连结 O_1A、O_2B、O_1M、O_2M，作 $O_2C \perp O_1A$，垂足 C. MN 交 O_1O_2 于 D. 则 $MD = \frac{1}{2}MN = 1$，且

$O_1D = \sqrt{O_1M^2 - MD^2} = \sqrt{24}$，

$O_2D = \sqrt{O_2M^2 - MD^2} = \sqrt{8}$.



(1)



(2)

(第 3 题)

因此，$AB = CO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - CO_1^2} = \sqrt{(O_1D + O_2D)^2 - CO_1^2}$.

$= \sqrt{(\sqrt{24}+\sqrt{8})^2 - (5-3)^2}$

$= 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} = 4+2\sqrt{3}$(cm).

如图(2),则

$$AB=\sqrt{O_1O_2^2-CO_1^2}=\sqrt{(O_1D-O_2D)^2-CO_1^2}=4-2\sqrt{3}(\text{cm}).$$

综上所述,AB 长为 $4+2\sqrt{3}$cm 或 $4-2\sqrt{3}$cm.

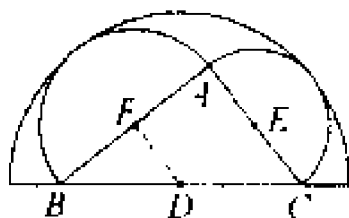
二、解答题

4. **证明** 设 E、F 分别是边 AC、AB 的中点(如图),连结 DF.则

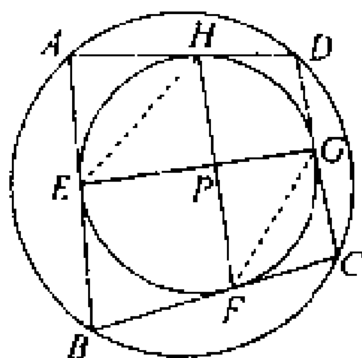
$\odot D$ 的半径 - $\odot F$ 的半径

$$=\frac{1}{2}(AB+AC)-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}AC=DF.$$

即$\odot D$ 与$\odot F$ 的圆心距等于它们的半径之差,故$\odot D$ 与$\odot F$ 相内切.



(第 4 题)



(第 5 题)

5. **证明** 如图,连结 EH 和 FG,设 EG 与 HF 相交于 P.依题设,有

$$\angle A+\angle C=90^\circ,$$

进而,得

$$2\angle AEH+2\angle CFG=360^\circ-(\angle A+\angle C)=180^\circ,$$

即

$$\angle AEH+\angle CFG=90^\circ.$$

因$\angle AEH\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{EH}$,$\angle CFG\overset{m}{=}\frac{1}{2}\overset{\frown}{FG}$,故

$$\angle EPH\overset{m}{=}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{EH}+\overset{\frown}{FG})=90^\circ,$$

可知 $EG\perp HF$.

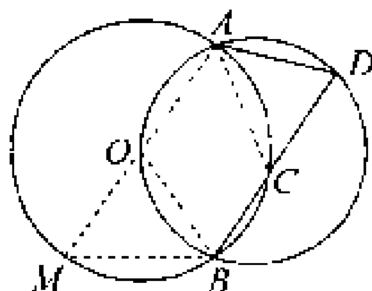
6. **证明** 如图,连结 AC,作$\odot O$ 的直径 AM,再连结 OB、OM.

由 A、M、B、C 共圆知$\angle ACD=\angle M$,

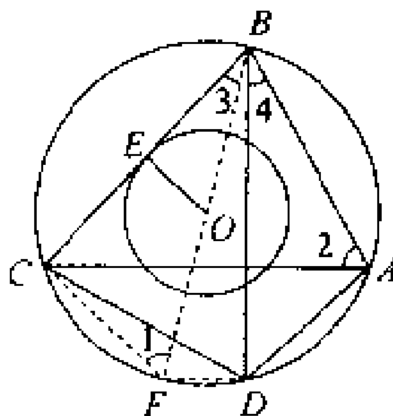
由 A、O、B、D 共圆知$\angle MOB=\angle D$,

于是$\angle OBM=\angle DAC$.又$\angle OBM=\angle OMB=\angle ACD$,故$\angle DAC=\angle ACD$,可得 $AD=DC$.

7. **证明** 如图,连结 BO、延长交大圆于 F,连结 FC,则 BF 为大圆的直径,



（第6题）

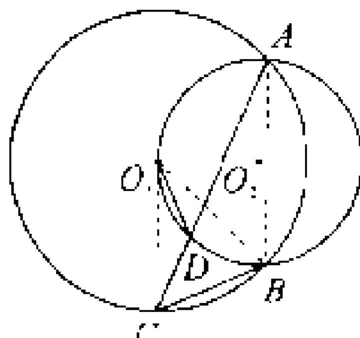


（第7题）

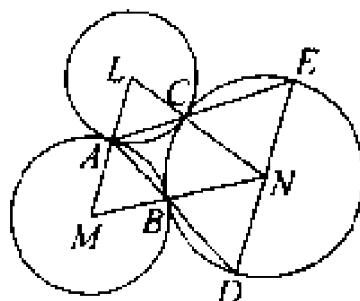
$\angle BCF=90°$. 又 BC 与小圆相切于 E，有 $OE\perp BC$. 注意到 $BO=OF$，故 $OE=\frac{1}{2}CF$.

连结 FD，有 $\angle BDF=90°$，$FD\perp BD$. 又 $AC\perp BD$，故 $AC/\!/DF$，有 $\overset{\frown}{CF}=\overset{\frown}{AD}$，从而可得 $CF=AD$. 因此，$OE=\frac{1}{2}AD$.

8. **证明** 如图，连结 AB、O_1B、O_1C，则 $\angle CAB=\angle DO_1B=\frac{1}{2}\angle BO_1C$，$O_1D$ 平分 $\angle BO_1C$. 又 $O_1C=O_1B$，故 $O_1D\perp BC$.



（第8题）



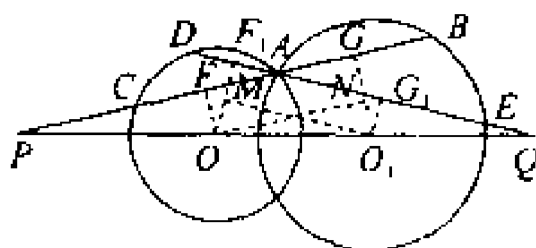
（第9题）

9. **证明** 如图，设以 AB、AC 为弦的圆的圆心分别为 M、L，第三个圆的圆心为 N. 连结 ND、NE，则 $\angle MAB=\angle MBA$，$\angle NBD=\angle NDB$，而 $\angle ABM=\angle NBD$，故 $\angle MAB=\angle NDB$，所以 $AM/\!/DN$. 同理 $LA/\!/EN$. 因 L、A、M 三点共线，故 E、N、D 共线.

10. **证明** 如图，作 $OF\perp CA$、$OF_1\perp DA$，垂足分别为 F、F_1，则 $CF=FA$，$DF_1=AF_1$. 又作 $O_1G\perp AB$、$O_1G_1\perp AE$，垂足分别为 G、G_1，则 $AG=GB$，$AG_1=EG_1$.

作 $ON\perp O_1G$，$O_1M\perp OF_1$，垂足分别为 N、M，则 $NO/\!/BP$，$O_1M/\!/DQ$. 由

$\angle BPQ=\angle DQP$ 知



（第 10 题）

$$\angle NOO_1=\angle BPQ=\angle DQP=\angle MO_1O,$$

于是 $Rt\triangle ONO_1 \cong Rt\triangle O_1MO$，有 $ON=O_1M$. 注意到四边形 $ONGF$ 与 O_1MF_1G 都是矩形，故 $FG=ON$，$F_1G_1=MO_1$，进而有 $FG=F_1G_1$，$BC=DE$.

11. **解** (1)因$\angle C=60°$，作 $AH\perp BC$ 于 H，所以$\angle CAH=30°$，$CH=AH\cdot\tan30°=\frac{\sqrt{3}}{3}AH$. 因$\angle BAC=75°$，故$\angle BAH=45°$. 又$\angle B=45°$，故 $BH=AH$. 设 $AH=m$，则 $CH=\frac{\sqrt{3}}{3}m$，$BH=m$，所以

$$BC=BH+HC=\frac{\sqrt{3}}{3}m+m=3+\sqrt{3}.$$

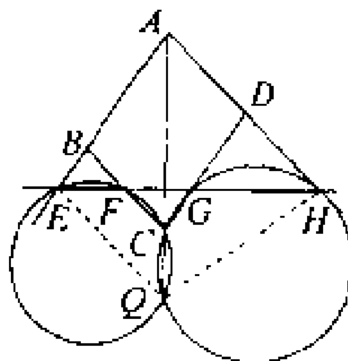
所以 $m=3$. 从而 $AH=3$，$HC=\sqrt{3}$，所以 $AB=\sqrt{2}AH=3\sqrt{2}$，$AC=2HC=2\sqrt{3}$.

(2)因为 PA 切两圆于 A，所以$\angle B=\angle SAC=\angle AED$，$DE\parallel BC$，$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，从而

$$AE:AD=AC:AB=2\sqrt{3}:3\sqrt{2}.$$

因$\triangle PAE\backsim\triangle PDA$，故

$$\frac{PA}{PD}=\frac{AE}{AD}=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$



（第 12 题）

12. **证明** 连结 AQ、CQ、EQ、HQ(如图). 因 E、F、C、Q 四点共圆，G、H、Q、C 四点共圆，故$\angle EQC=\angle GFC$，$\angle HQC=\angle FGC$. 又$\angle BAD=\angle FCG$，所以$\angle EQH+\angle BAD=\angle GFC+\angle FGC+\angle FCG=180°$，可知 A、E、Q、H 四点共圆. 于是$\angle EQA=\angle EHA$. 又 $BC\parallel DH$、$\angle EHA=\angle GFC=\angle EQC$，故$\angle EQA=\angle EQC$，$Q$ 在直线 AC 上.

练习十六

一、填空题

1. 设 $EC=x$，$BE=y$，$ED=z$，由$\triangle DCE\backsim\triangle ACD$ 可得

$$\frac{CD}{CA}=\frac{EC}{DC},$$

因 $CD=4, AE=6$,故

$$\frac{4}{6+x}=\frac{x}{4},$$

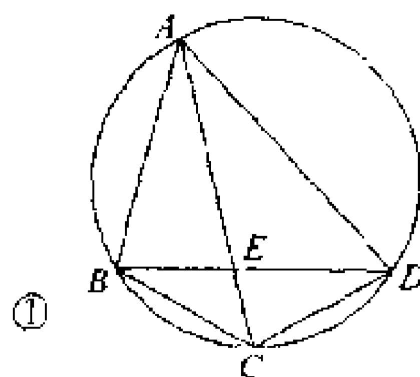
解得 $x=2$($x=-8$ 不合题意).又

$$AE\cdot EC=BE\cdot ED,$$

可得 $$yz=6\times 2=12. \quad ①$$

注意到 $y+z<4+4=8$,

故①中正整数解仅有$\begin{cases}y=3\\z=4\end{cases}$或$\begin{cases}y=4\\z=3\end{cases}$,均有 $y+z=7$. 即 $BD=7$.



(第1题)

2. 由$\angle DBE=\angle DCE$ 知 D、B、C、E 四点共圆. 因

$$\angle EBC=\angle A+\angle AEB=\angle DCE+\angle DCB=\angle ECB,$$

故 $EB=EC$. 取 BC 中点 F,连结 EF,则 $EF\perp BC$. 于是

$$AF=AB+\frac{1}{2}BC=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle AEF$ 中,有

$$AE=\frac{AF}{\cos\angle A}=5.$$

根据割线定理有

$$AD=\frac{AB\cdot AC}{AE}=\frac{18}{5},$$

所以 $$DE=AE-AD=5-\frac{18}{5}=\frac{7}{5}.$$

3. 依题设,有

$$QM\cdot QP=QA\cdot QB. \quad ①$$

$$QN^2=QA\cdot QB. \quad ②$$

由①、②得 $$QN^2=QM\cdot QP. \quad ③$$

设 $QM=x, QN=y$,则 $MN=MP=x+y, QP=2x+y$,代入③得

$$x(2x+y)=y^2.$$

即 $$(x+y)(2x-y)=0.$$

故 $y=2x$ 或 $x=-y$(舍去). 于是 $PM:MQ=3:1$.

4. 因$\angle AED=\angle AFD=90°$,故 A、E、D、F 四点共圆,且 AD 是该圆直径. 又由 $AD\perp BC$,可知 PD 为该圆切线,故

$$PD^2 = PE \cdot PF. \quad ①$$

因$\angle ADF + \angle FDC = 90°$、$\angle FDC + \angle C = 90°$，故$\angle ADF = \angle C$. 又$\angle AEF = \angle ADF$，所以$\angle AEF = \angle C$，可知 E、B、C、F 四点共圆，有

$$PB \cdot PC = PE \cdot PF. \quad ②$$

由①、②得
$$PD^2 = PB \cdot PC. \quad ③$$

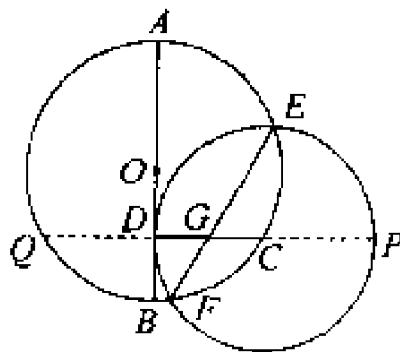
因 $BD = 2$、$DC = 5$，故由③可得

$$(PB + 2)^2 = PB(PB + 7),$$

解得 $PB = \frac{4}{3}$.

二、解答题

5. 证明 如图，延长 DC 交$\odot C$ 于 P，延长 CD 交$\odot O$ 于 Q. 因 AB 切$\odot C$ 于 D，故 $CD \perp AB$. 从而可知 $DQ = DC = CP$.



(第 5 题)

根据相交弦定理可得

$$PG \cdot GD = EG \cdot GF,$$

$$CG \cdot GQ = EG \cdot GF.$$

故
$$PG \cdot GD = CG \cdot GQ.$$

即 $(PC + CG)(PC - CG) = (CD - GD)(CD + DG)$，

可得
$$PC^2 - CG^2 = CD^2 - GD^2.$$

因 $PC = CD$，故 $CG = DG$.

6. 证明 因 MN 与$\odot O_2$ 相切、N 为切点，故

$$MN^2 = ME \cdot MB.$$

又 CB 为$\odot O_2$ 的切线，故$\angle CBN = \angle MNB \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAN}$. 因 MN 与$\odot O_1$ 相切于 M，故$\angle BMN = \angle C$. 所以

$$\begin{aligned}\angle D &= 180° - (\angle C + \angle CBD) \\ &= 180° - (\angle BMN + \angle CBD) \\ &= 180° - (180° - \angle MNB - \angle MBN + \angle CBD) \\ &= \angle MBN.\end{aligned}$$

有 $MB = MD$. 于是 $MN^2 = ME \cdot MD$.

7. 证明 根据相交弦定理，有

$$DC \cdot CF = AC \cdot CB,$$

$$CG \cdot CE = AC \cdot CB,$$

故 $$DC \cdot CF = CG \cdot CE.$$

即 $$CF(DE + CE) = CE(CF + FG).$$

可得 $$CF \cdot DE = CE \cdot FG,$$

即 $$DE : EC = GF : FC.$$

8. **证明** 如图，设 MN 与 PQ 交于 D，根据相交弦定理，有

$$DP \cdot DQ = DC \cdot DC', \quad ①$$

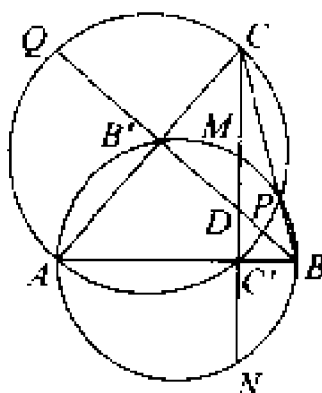
$$DM \cdot DN = DB \cdot DB'. \quad ②$$

由 $\angle CC'B = \angle CB'B = 90^\circ$ 知 C、B'、C'、B 四点共圆，于是

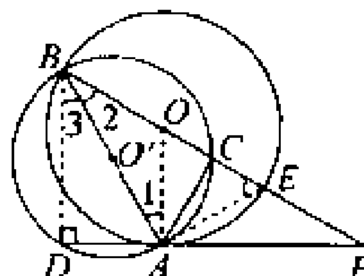
$$DC \cdot DC' = DB \cdot DB'. \quad ③$$

从而，有 $$DP \cdot DQ = DM \cdot DN.$$

故 P、Q、M、N 四点共圆。



（第 8 题）



（第 9 题）

9. **解** (1)如图，连结 DA、OA，因 AB 为$\odot O'$ 的直径，有 $BD \perp PD$。又 PA 为$\odot O$ 的切线，A 为切点，有 $OA \perp PB$，故 $OA \parallel BD$，$\angle 1 = \angle 3$。又 $OA = OB$，可知 $\angle 1 = \angle 2$，所以$\angle 2 = \angle 3$。在$\odot O'$ 中，$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AD}$，于是 $AC = AD$。

(2)因 $PA = AB$，故 $\angle P = \angle 2 = \angle 3$。在 Rt$\triangle BDP$ 中，因$\angle 2 + \angle 3 + \angle P = 90^\circ$，$\angle P = \angle 2 = 30^\circ$，故 $OE = OA = \frac{1}{2}OP$。

设$\odot O$ 半径为 R，则 $PE = R$，$PB = 3R$，于是

$$PA^2 = PE \cdot PB = 3R^2 = 16,$$

可得 $R = \frac{4\sqrt{3}}{3}$(cm)。故$\odot O$ 的直径为$\frac{8\sqrt{3}}{3}$cm。

10. **证明** 连结 BD、AD。因 AB 为半$\odot O_1$ 的直径，故$\angle ADB = 90^\circ$。又 CD 为半$\odot O_2$ 的切线，$CD \perp AB$，于是有 Rt$\triangle BCD \backsim$ Rt$\triangle BDA$，可得

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BA},$$

即 $$BD^2 = BC \cdot BA. \quad ①$$

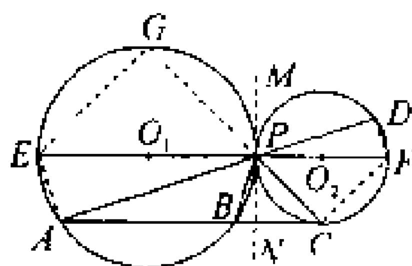
又 BE 为半$\odot O_2$的切线，有

$$BE^2 = BC \cdot BA. \quad ②$$

由①、②得 $BD = BE$，故 BM 为 DE 的垂直平分线，$MD = ME$.

11. **解** (1)如图，过点 P 作$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的内公切线 MN. 因$\angle BPN = \angle A$，$\angle NPC = \angle ACP$，$\angle BPC = \angle BPN + \angle NPC$，$\angle CPD = \angle A + \angle ACP$，故$\angle BPC = \angle CPD$.

(2)连结 O_1O_2 并延长分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于 E、F，则 EF 过点 P. 延长 CP 交$\odot O_1$ 于 G. 连结 AE、GE、CF、DF，则$\angle PAE = \angle PDF = 90^\circ$，可知 $AE /\!/ DF$，$\frac{PA}{PD} = \frac{PE}{PF}$. 因 $PE = 2PF$，$PD = 10$，故 $PA = 20$，$AD = 30$. 进而有



(第 11 题)

$$AC^2 = AP \cdot AD = 600,$$

所以 $AC = 10\sqrt{6}$，$BC = 3\sqrt{6}$.

同理 $PG = 2PC$. 于是，根据割线定理，有

$$CP \cdot CG = CB \cdot CA,$$

即 $$3PC^2 = 3\sqrt{6} \times 10\sqrt{6}$$

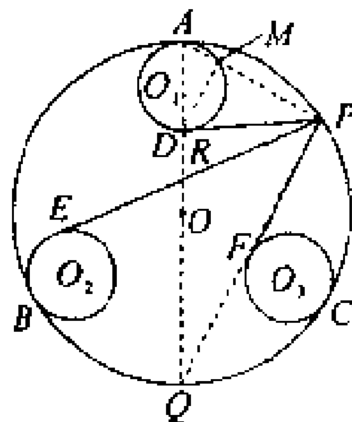
解得 $PC = 2\sqrt{15}$.

12. **证明** 如图，连结 OO_1，交$\odot O$ 于 Q，交$\odot O_1$ 于 R. 连结 AP 交$\odot O_1$ 于 M，连结 MR、PQ. 设$\odot O$ 半径为 R，$\odot O_1$ 半径为 $r(R > r)$，则 A、O_1、O 在同一直线上.

因$\angle RMA = \angle QPA = 90^\circ$，故 $PQ /\!/ MR$. 于是

$$\frac{PD^2}{PA^2} = \frac{PM \cdot PA}{PA^2} = \frac{PM}{PA} = \frac{2(R-r)}{2R} = \frac{R-r}{R}.$$

故$\frac{PD}{PA} = \sqrt{\frac{R-r}{R}}$.



(第 12 题)

同理可得$\frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PC} = \sqrt{\frac{R-r}{R}}$.

连结 AB、BC、CA、PA、PB、PC，在 PB 上取一点 N，使 $PN = PC$. 显然$\triangle ABC$ 为等边三角形，$\angle BPC = \angle BAC = 60^\circ$，则$\triangle PNC$ 也为等边三角形，有 $PC = NC$. 注意到$\angle PCA = \angle NCB$，故$\triangle PCA \cong \triangle NCB$，有 $AP = BN$. 因此，$AP + PC = PB$. 进而，由

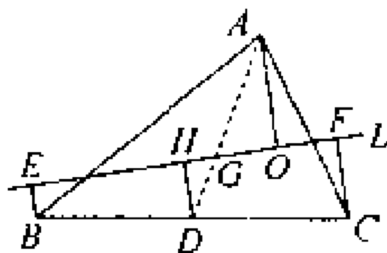
$$\frac{PD}{PA}=\frac{PE}{PB}=\frac{PF}{PC},$$

得 $$\frac{PD+PF}{PA+PC}=\frac{PE}{PB}.$$

故 $$PD+PF=PE.$$

练习十七

1. **证明** 如图,连结 AG 并延长交 BC 于 D,则 $BD=DC$.过 D 作 $DH\perp\ell$ 于 H,则 $BE/\!/DH/\!/CF$,DH 为梯形 $BEFC$ 的中位线,$DH=\frac{1}{2}(BE+CF)$.又$\triangle AOG\backsim\triangle DHG$,有$\frac{DH}{AO}=\frac{DG}{AG}=\frac{1}{2}$,即 $DH=\frac{1}{2}AO$.因此 $AO=BE+CF$.



(第 1 题)

2. **证明** 连 AE、BD、MC、PC、CF、BN、NE、PE.因$\triangle ACE\cong\triangle BCD$,故 $BD=AE$,同理 $FC=BD$.从而有$\triangle BMN\backsim\triangle BCF$,得$\frac{MN}{FC}=\frac{BM}{BC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.同理可得$\frac{PN}{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}$,$\frac{MP}{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.于是可得 $MN=NP=PM$,即$\triangle MNP$ 是正三角形.

3. **证明** 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,因 $CD\perp AB$,CO_1 为$\angle BCD$ 的平分线,故

$$\angle ANC=\angle B+\angle BCN=\angle ACD+\angle DCN=\angle ACN,$$

可知 $AN=AC$.同理可证 $BM=BC$.

连结 AO 并延长交 CN 于 E,连结 BO 并延长交 CM 于 F.显然 O_1 在 AE 上,O_2 在 BF 上,从而 AE、CF 分别为 CN,CM 的垂直平分线,有 $OM=OC=ON$,即 O 为$\triangle CMN$ 的外心.故$\angle MON=2\angle MCN=\angle ACB=90^\circ$,即 $OM\perp ON$.

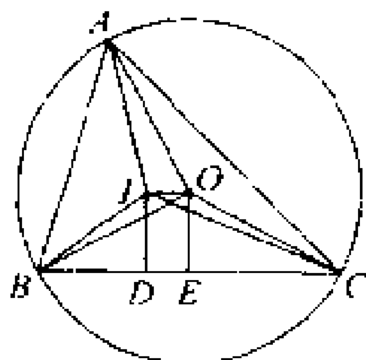
4. **证明** 如图,作 $ID\perp BC$,$OE\perp BC$,垂足分别为 D、E,则 $ID/\!/OE$,且

$$BD=\frac{1}{2}(AB+BC-AC),$$

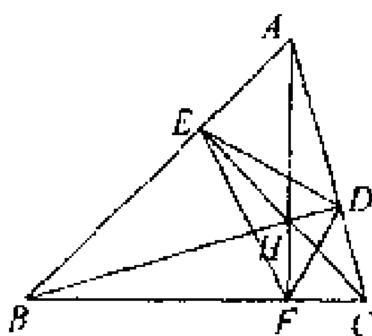
$$DE=BE-BD=\frac{1}{2}BC-\frac{1}{2}(AB+BC-AC)=\frac{1}{2}(AC-AB).$$

又 $IO=\frac{1}{2}(AC-AB)$,故 $DE=IO$.注意到 DE 为平行线ID、OE 间距离,故 IO 也是平行线 ID、OE 间距离,故 $OI/\!/DE$,即 $OI/\!/BC$.

5. **证明** 如图,$BD\perp AC$,$AF\perp BC$,$CE\perp AB$,则 E、H、D、A 四点共圆,A、B、F、D 四点共圆,B、F、H、E 四点共圆.于是有$\angle FEH=\angle HBF=\angle HAD=$



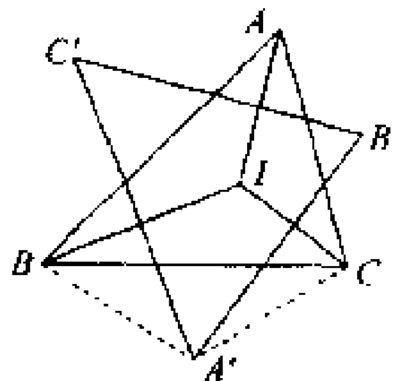
（第 4 题）



（第 5 题）

$\angle HED$.由此可知 EH 为$\angle FED$ 的内角平分线.同理可得 HF 是$\angle DFE$ 的内角平分线、HD 是$\angle EDF$ 的内角平分线.故 H 是$\triangle DEF$ 的内心.又 H 是$\triangle ABC$ 的垂心,因此,结论成立.

6. **证明** 如图,因 A' 是$\triangle IBC$ 的外心,故$\angle BA'C = 360° - 2\angle BIC$.又 I 是$\triangle ABC$ 的内心,有$\angle BIC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$.因此,



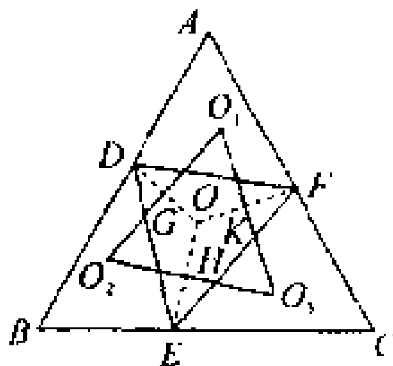
（第 6 题）

$$\angle BA'C = 360° - 2(90° + \frac{1}{2}\angle BAC),$$

即 $$\angle BAC + \angle BA'C = 180°.$$

所以,A、B、A'、C' 四点共圆.同理可证 A、B、C、B' 四点共圆,A、C、B、C' 四点共圆.因此,A、B、C、A'、B'、C' 六点共圆,$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$ 有相同外心.

7. **证明** 如图,设$\triangle ADF$ 和$\triangle BDE$ 的外接圆交于 O,连结 DO、EO、FO.因$\angle OEC = \angle ODB$,$\angle OFC = \angle ODA$,故



（第 7 题）

$$\angle OEC + \angle OFC = \angle ODB + \angle ODA = 180°.$$

可知 O、E、C、F 四点共圆.于是$\triangle CFE$ 的外接圆过点 O.从而知$\triangle ADF$,$\triangle BED$,$\triangle CFE$ 的外接圆交于 O 点.因$\angle A = \angle B = \angle C = 60°$,故

$$\angle DOE = \angle EOF = \angle FOD = 120°.$$

又因 $O_1O_2 \perp OD$,$O_2O_3 \perp OE$,$O_3O_1 \perp OF$,设垂足分别为 G、H、K,则 O_1、G、O、K 四点共圆,O_2、H、O、G 四点共圆,O_3、K、O、H 四点共圆.于是$\angle O_1 = \angle O_2 = \angle O_3 = 60°$,可知$\triangle O_1O_2O_3$ 为正三角形.

8. **证明** (1)如图,连结 AI,由

$\angle AIK = \angle ACK + \angle CAI = \angle BCK + \angle IAB = \angle BAK + \angle IAB = \angle IAK$,

知 $AK = IK$. 又 $AK = BK$,故 $AK = BK = IK$.

(2)因$\angle ACK = \angle BAK$,故$\triangle CAK \backsim \triangle ADK$,有

$$\frac{CA}{AD} = \frac{CK}{AK},$$

即
$$\frac{CK}{IK} = \frac{CA}{AD}. \qquad ①$$

同理可证
$$\frac{CK}{IK} = \frac{CB}{BD}. \qquad ②$$

由①,②得
$$\frac{CK}{IK} = \frac{CA}{AD} = \frac{CB}{BD} = \frac{CA+CB}{AD+DB} = \frac{CA+CB}{AB}.$$

进而,有
$$\frac{CI}{IK} = \frac{CK-IK}{IK} = \frac{CA+CB-AB}{AB}. \qquad ③$$

因
$$\frac{CI}{ID} = \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC+BC}{AB} \qquad ④$$

由③,④得
$$\frac{IC}{ID} - \frac{IC}{IK} = 1,$$

即
$$\frac{1}{ID} - \frac{1}{IK} = \frac{1}{IC}.$$

(第 8 题)

(3)由(1)知

$$\frac{IK}{DK} = \frac{AK}{DK} = \frac{CK}{AK} = \frac{CK}{IK} = \frac{AC+BC}{AB},$$

进而,有
$$\frac{IK-DK}{DK} = \frac{AC+BC-AB}{AB}, \qquad ⑤$$

由④,⑤可得
$$\frac{IC}{ID} - \frac{ID}{DK} = 1.$$

9. 解 (1)连结 DI_1、DI_2,并延长 DI_1 交 AB 于 G. 则 $Rt\triangle ABD \backsim Rt\triangle CAD$,且 $\angle I_1DI_2 = 90°$,$\frac{DI_1}{DI_2} = \frac{AB}{AC}$,所以$\triangle DI_1I_2 \backsim \triangle ABC$,从而$\angle AEF = \angle GDB = 45°$. 故 $\angle AFE = 45° = \angle AEF$,得 $AE = AF$.

(2)假设$\angle BAC \neq 90°$,则$\angle AEF = \angle AFE \neq 45°$,连 AI_1、AI_2、DI_1、DI_2,则 $AE = AF \neq AD$. 在 AB、AC 上分别截取AE'、AF',使得 $AE' = AF' = AD$,故 $ADI_1 \cong \triangle AE'I_1$,$\triangle ADI_2 \cong \triangle AF'I_2$,得$\angle AE'I_1 = \angle AF'I_2 = 45°$,于是$\angle EE'I = \angle FF'I = 45°$或 $135°$. 从而$\triangle EE'I_1 \cong \triangle FF'I_2$,得 $EI_1 = FI_2$. 又$\triangle AEI_1 \cong \triangle AFI_2$,得$\angle BAD = \angle CAD$,故$\angle B = \angle C$,$AB = AC$. 因此,$AE = AF$,$\angle BAC$ 不一定等于 $90°$. 当 $AB = AC$ 时存在不成立情形.

10. **证明** 设 AL、BM、CN 为$\triangle ABC$ 的 3 条高，AL 交中位线 EF 于 K，则 K 为 AL 的中点，且 AK 垂直平分 SR，有 $AS=AR$. 类似地，$BT=BV$，$CP=CQ$.

设$\odot H$ 的半径为 r，则

$$\begin{aligned}AR^2&=AK^2+KR^2=AK^2+r^2-HK^2\\&=r^2+AH(AK-HK)\\&=r^2+AH\cdot HL.\end{aligned}$$

同理
$$BT^2=r^2+BH\cdot HM.$$
$$CP^2=r^2+CH\cdot HN.$$

由 C、M、H、L 四点共圆知 $AH\cdot HL=AM\cdot MC$. A、N、H、M 四点共圆知 $CH\cdot HN=CM\cdot AM$. 故

$$AH\cdot HL=CH\cdot HN.$$

类似地有
$$CH\cdot HN=BH\cdot HM.$$

因此
$$AH\cdot HL=BH\cdot HM=CH\cdot HN.$$

所以
$$AR=BT=CP,$$

即
$$AR=AS=BT=BV=CP=CQ.$$

11. **证明** 连 AI 交 BC 于 P，交外接圆于 K，连 BK，则 $OK\perp BC$，$OK=R$，$PC=\frac{ab}{b+c}$，$BK=IK$，$\triangle AKB\backsim\triangle ACP$. 又 $AD/\!/OK$，有$\frac{AD}{OK}=\frac{AI}{IK}$. 即

$$\frac{AD+OK}{OK}=\frac{AK}{IK}=\frac{AK}{BK}.$$

而由$\triangle AKB\backsim\triangle ACP$ 可得

$$\frac{AK}{BK}=\frac{AC}{PC}=\frac{b+c}{a}.$$

于是，有

$$\frac{h_a+R}{R}=\frac{b+c}{a},$$

进而得
$$R=\frac{ah_a}{b+c-a}=\frac{2S_{\triangle ABC}}{b+c-a}=r_a.$$

这里 R、r_a 分别为$\triangle ABC$ 外接圆与 BC 边上旁切圆半径. 故命题获证.

12. **证明** 连结 A_1B、A_1C、A_1I_1，则$\angle BI_1C=\frac{\angle B+\angle C}{2}$，所以$\angle BA_1C=2\angle BI_1C=\angle B+\angle C$，从而有$\angle BA_1C+\angle A=180°$，可得 A、B、A_1、C 四点共圆. 同理得 A、B、C、B_1 四点共圆，A、C_1、B、C 四点共圆，故 A、B、C、A_1、B_1、C_1 六点共圆，命题获证.

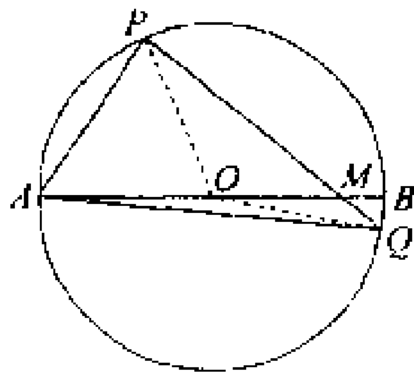
练习十八

一、填空题

1. 三个阴影三角形的面积都等于 $S_{\triangle ABC}$，其和为

$$S_{\text{I}}+S_{\text{II}}+S_{\text{III}}=3S_{\triangle ABC}\leqslant 3\cdot\frac{1}{2}AB\cdot AC=9.$$

当$\angle BAC=90^\circ$时取等号.故阴影部分的最大面积为 9.



(第 2 题)

2. 如图，依题设知

$S_{\triangle PAM}:S_{\triangle POM}=AM:OM=7:3.$

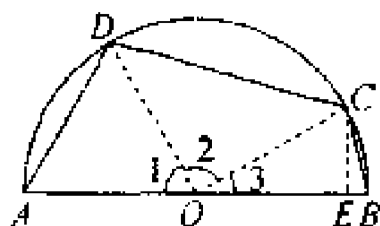
同理 $S_{\triangle QAM}:S_{\triangle QOM}=7:3.$

于是 $S_{\triangle APQ}=\frac{7}{3}S_{\triangle OPQ}$，注意到

$$S_{\triangle OPQ}\leqslant\frac{1}{2}\cdot OP\cdot OQ=\frac{R^2}{2},$$

当$\angle POQ=90^\circ$时 $S_{\triangle OPQ}$有最大值$\frac{R^2}{2}$.此时 $S_{\triangle APQ}$有最大值$\frac{7}{6}R^2$.

当$\angle POQ=90^\circ$时，点 O 到 PQ 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}R$，而 $OM=\frac{\sqrt{3}}{4}R>\frac{\sqrt{2}}{2}R$，故 PQ 是存在的.



(第 3 题)

3. 如图，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=75^\circ$. 设圆心为 O，连结 OD、OC，则$\angle 1=60^\circ$，$\angle 3=30^\circ$、$\angle 2=90^\circ$，故 $OA=OB=OC=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$.于是

$$S_{\triangle ADO}=\frac{\sqrt{3}}{4}OA^2=\frac{\sqrt{3}}{8},$$

$$S_{\triangle DOC}=\frac{1}{2}OC^2=\frac{1}{4},$$

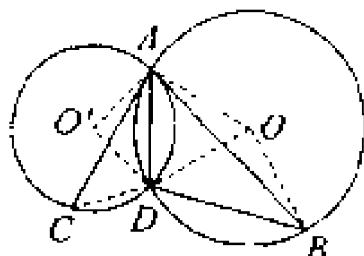
作 $CE\perp OB$，垂足为 E，则 $CE=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{2}}{4}$.于是

$$S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OB\cdot CE=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{8}.$$

故 $$S=S_{\triangle ADO}+S_{\triangle DOC}+S_{\triangle COB}=\frac{3+\sqrt{3}}{8}.$$

4. 如图，因 AB 切$\odot O'$于 A，有$\angle O'AB=90^\circ$. 连结 $O'D$，$\angle BAD=45^\circ$，故$\angle O'AD=45^\circ$、$\angle AO'D=90^\circ$. 因 $O'A=5\sqrt{2}$，故 $AD=\sqrt{2}\cdot O'A=10$.

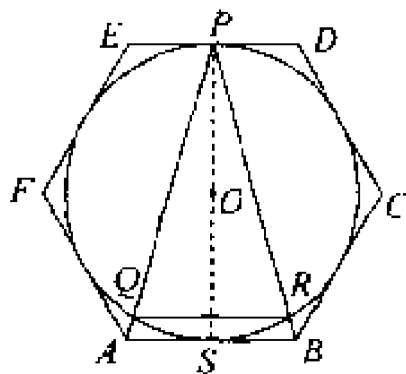
连结 OA、OB、OD,因此 AC 切⊙O 于 A,$\angle OAC=90°$,$\angle CAD=30°$.故 $\angle OAD=60°$.$\triangle OAD$ 为正三角形,可知 $AD=OD=10$.因 $\angle BOD=2\angle BAD=90°$,故 $S_{\triangle BOD}=\frac{1}{2}\cdot OD^2=50$,且 $S_{扇形OBD}=\frac{1}{4}\pi\cdot OD^2=25\pi$.所以,所求弓形面积为 $25\pi-50=25(\pi-2)$.



(第 4 题)

5. 如图,设⊙O 切 AB 边于点 S,连结 PS,易知 $PS\perp AB$,$PS\perp QR$,有 $QR/\!/AB$.于是 $\triangle PQR\backsim\triangle PAB$,有

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle PAB}}=\frac{PQ^2}{PA^2}. \qquad ①$$



(第 5 题)

因 $AS=1$,$PS=2OS=2\sqrt{3}$,故 $PA=\sqrt{PS^2+AS^2}=\sqrt{13}$.又 $QS\perp AP$,可得 $AS^2=AQ\cdot PA$,从而有

$AQ=\frac{AS^2}{PA}=\frac{1}{\sqrt{13}}$.进而,得

$$PQ=PA-AQ=\sqrt{13}-\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{12}{\sqrt{13}}.$$

所以

$$S_{\triangle PQR}=\frac{PQ^2}{PA^2}S_{\triangle PAB}=\frac{PQ^2}{PA^2}\cdot\frac{1}{2}PS\cdot AB$$

$$=\frac{(\frac{12}{\sqrt{13}})^2}{(\sqrt{13})^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=\frac{288\sqrt{3}}{169}.$$

6. 因 AB 是直径,O 为圆心,且 $OC/\!/AD$,故 OC 垂直平分 BD.设 $S_{\triangle BCE}=S$,则 $S_{\triangle CED}=S$,$S_{梯形AOCD}=4S$,$S_{梯形AOED}=3S$.因 $OE/\!/AD$,使

$$\frac{S_{\triangle BOE}}{S_{\triangle BAD}}=(\frac{OB}{AO})^2=\frac{1}{4},$$

即

$$\frac{S_{\triangle BOE}}{S_{梯形AOED}}=\frac{1}{3}.$$

于是 $S_{\triangle BOE}=S=S_{\triangle BCE}$,有 $OE=EC$,BE 为 OC 的垂直平分线,$BC=BO=OC$.所以 $S_{\triangle OBC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

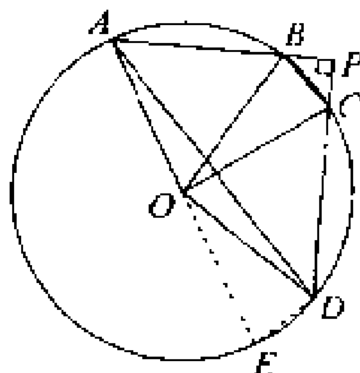
二、解答题

7. **证明** 因 $\angle PAD+\angle PDA=90°$,

故 $\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}=180°$.

延长 AO 交⊙O 于 E，连结 DE（如图），则 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DE}$，$BC=DE$，

$\triangle OBC\cong\triangle ODE$，故 $S_{\triangle AOD}=S_{\triangle ODE}=S_{\triangle OBC}$.



（第 7 题）

8. **证明** 根据托勒密定理得

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD. \qquad ①$$

又 $AC\perp BD$，故

$$S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}(AC\cdot DE+AC\cdot BE)=\frac{1}{2}AC\cdot BD. \qquad ②$$

由①、②即知命题成立.

9. **解** (1) 因 $\angle CQP=\angle AQR=90^\circ-\angle A=\angle CBA$，故 $Rt\triangle PQC\backsim Rt\triangle ABC$，有

$$\frac{S_{\triangle PQC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PC^2}{AC^2}=\frac{x^2}{b^2}.$$

但 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$，故

$$S_1=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{x^2}{b^2}=\frac{ax^2}{2b}. \qquad ①$$

同理可证 $Rt\triangle PBR\backsim Rt\triangle ABC$，有

$$S_2=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{(a-x)^2}{c^2}=\frac{ab(a-x)^2}{2c^2}. \qquad ②$$

由①、②得

$$\begin{aligned}S_1+S_2&=\frac{ax^2}{2b}+\frac{ab(a-x)^2}{2c^2}\\&=\frac{a}{2bc^2}[(b^2+c^2)x^2-2ab^2x+a^2b^2]\\&=\frac{a(b^2+c^2)}{2bc^2}\left[\left(x-\frac{ab^2}{b^2+c^2}\right)^2+\frac{a^2b^2c^2}{(b^2+c^2)^2}\right].\end{aligned}$$

(2) 因 $0<x<a$，$0<\frac{ab^2}{b^2+c^2}<a$. 故当 $x=\frac{ab^2}{b^2+c^2}$ 时，S_1+S_2 有最小值 $\frac{a^3b}{2(b^2+c^2)}$.

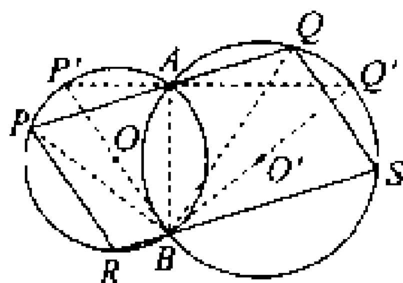
10. **解** 如图，连接 AP、PB、QB，有

$$\angle APR+\angle AQS=\angle APR+\angle ABR=180^\circ,$$

故 $PR\parallel QS$，四边形 $PQSR$ 为平行四边形. 设直线 BP、BQ 所成锐角或直角为 α，

则

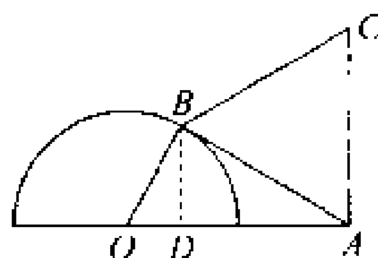
$$S_{四边形PQSR}=2S_{\triangle BPQ}=BP\cdot BQ\sin\alpha$$



(第10题)

过点 A 作 AB 的垂线交⊙O、⊙O'于点 P'、Q'，连结 $P'B$、$Q'B$，则 $P'B$ 为⊙的直径，PB 为⊙O 的弦，$P'B\geq PB$. 同理 $Q'B\geq QB$. 注意到 $\angle P'=\angle APB$，$\angle Q'=\angle AQB$，故 $\angle PBQ$ 为定角，$\sin\alpha$ 为定值. 设⊙O、⊙O'的直径分别为 d、d_1，AB 长为 m，则四边形 $PQRS$ 的面积的最大值为

$$S=(\sqrt{d^2-m^2}+\sqrt{d_1^2-m^2})m.$$



(第11题)

11. **解** 设 $OB=R$. 则 $OA=2R$. 过点 B 作 $BD\perp OA$，D 为垂足(如图)，又设 $OD=x$，则 $DA=2R-x$，$BD=\sqrt{R^2-x^2}$，

$AB^2=DA^2+BD^2=(2R-x)^2+(R^2-x^2)=5R^2-4Rx$.

有 $$S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}(5R^2-4Rx).$$

$$S_{\triangle OBA}=\frac{1}{2}OA\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 2R\sqrt{R^2-x^2}=R\sqrt{R^2-x^2}.$$

所以
$$\begin{aligned}S_{四边形ACBO}&=S_{\triangle OBA}+S_{\triangle ABC}\\&=R\sqrt{R^2-x^2}+\frac{\sqrt{3}}{4}(5R^2-4Rx)\\&=R\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{3}Rx+\frac{5}{4}\sqrt{3}R^2.\end{aligned}$$

设 $y=R\sqrt{R^2-x^2}-\sqrt{3}Rx$，则

$$y+\sqrt{3}Rx=R\sqrt{R^2-x^2},$$

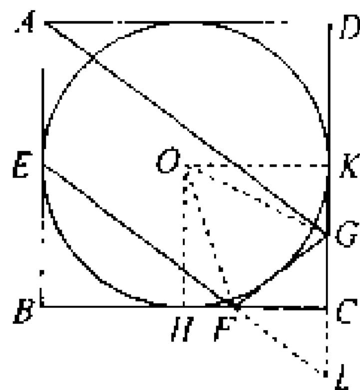
可得 $$4R^2x^2+2\sqrt{3}Ryx+y^2-R^4=0.$$

由 $$\Delta=(2\sqrt{3}Ry)^2-4\cdot4R^2\cdot(y^2-R^4)\geq0,$$

从而解得 $y^2\leq4R^4$. y 的最大值为 $2R^2$，当 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}R$ 时取得. 于是四边形 $ACBO$ 的面积最大值为

$$2R^2+\frac{5}{4}\sqrt{3}R^2=(2+\frac{5\sqrt{3}}{4})R^2.$$

12. **证明** 如图，延长 DC 交 EF 延长线于点 L. 设 $AB=2a$，$HF=x$，则 $CF=a-x$，$BF=a+x$，$CL=\frac{(a-x)a}{a+x}$，$GL=a$. 故 $GC=a-CL=\frac{2x}{a+x}$，$GK=\frac{a(a-x)}{a+x}$. 设点 O 到 FG 的距离为 d，则



（第 12 题）

$$d=\frac{2S_{\triangle OFG}}{FG}=\frac{2(S_{\text{正方形}OHCK}-S_{\triangle GCF}-S_{\triangle OHF}-S_{\triangle OKG})}{FG}$$

$$=\frac{2\left[a^2-\frac{1}{2}(a-x)\cdot\frac{2ax}{a+x}-\frac{1}{2}ax-\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{a-x}{a+x}\right]}{\sqrt{(a-x)^2+(\frac{2ax}{a+x})^2}}$$

$$=\frac{2a\left[a-\frac{ax-x^2}{a+x}-\frac{a^2+x^2}{2(a+x)}\right]}{\sqrt{\frac{(a^2-x^2)^2+4a^2x^2}{(a+x)^2}}}=\frac{2a\left[\frac{a^2+x^2}{a+x}-\frac{a^2+x^2}{2(a+x)}\right]}{\sqrt{\frac{(a^2+x^2)^2}{(a+x)^2}}}$$

$$=\frac{a\cdot\frac{a^2+x^2}{a+x}}{\frac{a^2+x^2}{a+x}}=a.$$

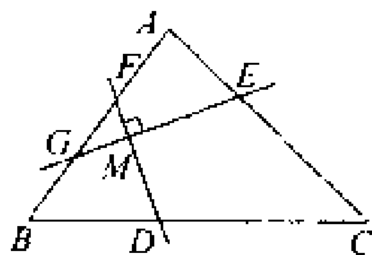
即 FG 与正方形 $ABCD$ 的内切圆相切.

练习十九

1. **解** 在地板的每一拼接点处，都用四个四边形拼拢. 且每个四边形各用一个不同的角，且以等长的边对接.

2. **证明** 当一个三角形的一个顶点沿一条线段移动时，它的面积在这条线段的一个端点处达到最大值（在另一端点处达到最小值）. 因此，可将 $\triangle ABC$ 的顶点 A 沿一条过 A 的直线调整到多边形的边上，再沿这条边调整到多边形的顶点处.

3. **证明** 假若一个单位圆能覆盖该矩形，这表明单位圆的内接矩形最大面积将大于 2，但单位圆的最大内接矩形面积为 2，矛盾. 故命题成立.



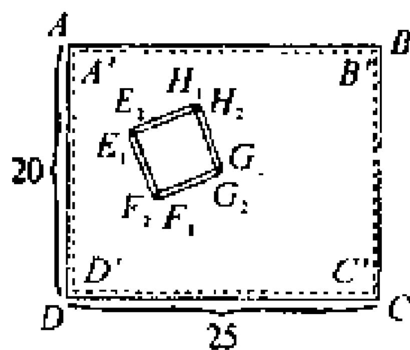
（第 5 题）

4. **证明** 不妨设 A、B、C 为凸多边形的三个顶点且是各顶点三角形面积最大者. 由第 2 题知它大于任何放入该多边形内的三角形，$S_{\triangle ABC}\leqslant 1$. 分别过 $\triangle ABC$ 各顶点作对边平行线，围成 $\triangle A'B'C'$. 则多边形位

于$\triangle A'B'C'$内.注意到$S_{\triangle A'B'C'}=4S_{\triangle ABC}\leqslant 4$,故命题成立.

5. **证明** 设M为$\triangle ABC$任一点过M作与矩形P的边平行的两条互相垂直的直线,交$\triangle ABC$的周界于D、E、F、G,如图所示,这四个点被三个长形覆盖,其中至少有两点被同一矩形盖住,如果G、F被矩形P盖住.则M也被P盖住.如果D、G被P盖住,因MG、MD分别平行平行矩形P两邻边,故M也被P盖住,同理当E、F被一矩形盖住时、或者当E、D被同一矩形盖住时,M也被矩形P盖住.根据M的任意性,命题得证.

6. **证明** 放入的小圆圆心应在边长为19×24的矩形$A'B'C'D'$内.又欲保证不与其正方形重迭,可在小正方形外镶上宽为$\frac{1}{2}$的边.再在四角装上半径为$\frac{1}{2}$的$\frac{1}{4}$圆.如图所示.由

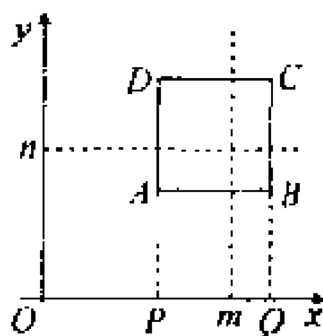


(第6题)

$$120\left(1+4\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<120\cdot\left(\frac{12+3.2}{4}\right)=456=19\times 24,$$

可知命题成立.

7. **证明** 如图,不妨设正方形$ABCD$在第一象限.延长DA、CB分别交横轴于P、Q,令$OP=p$,$OQ=q$,$p<q$.由题设$q-p>1$.若q不是整数,设$[q]=m$,$q=m+r$,$0<r<1$,那么$m-p>1-r>0$,否则$p<m<q$.又若q是整数,可取$m=q-1$.同样$p<m<q$.这表明直线$x=m$位于两直线AD、BC之间.



(第7题)

同理可证.存在一直线$y=n$,位于两直线DC、AB间.

两直线$x=m$,$y=n$的交点(m,n)是一整点.这整点在正方形$ABCD$内部,故命题得证.

8. **证明** 分三种情形进行讨论:

(ⅰ)$\triangle ABC$是钝角三角形.以BC为直径作圆.因$\angle A>90°$,可知此圆面可覆盖$\triangle ABC$.且毫无疑义,该圆为所求最小圆,否则不能覆盖BC.

(ⅱ)$\triangle ABC$是直角三角形.同样以BC为直径的圆面即为所求最小圆面.

(ⅲ)$\triangle ABC$是锐角三角形.设圆O能覆盖$\triangle ABC$,我们可以在圆O内平移$\triangle ABC$.使一个顶点B落到圆周上.再经过旋转,使另一个顶点也落在圆周上.此时第三个顶点A在圆O内或圆周上.设BC所对的圆周角为α,那么$\angle BAC\geqslant\angle\alpha$.过$C$作圆$O$的直径$CA'$.连结$BA'$,可知$CA'=\frac{BC}{\sin\alpha}$.同理,$\triangle ABC$外接圆直

径 $=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$. 于是圆 O 的直径 $=\frac{BC}{\sin\alpha}\geqslant\frac{BC}{\sin\angle BAC}=\triangle ABC$ 的外接圆直径. 故对于锐角$\triangle ABC$,最小覆盖圆面是它的外接圆.

9. **证明** 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$. 依题设,有

$$6>a^2+b^2+c^2\geqslant a^2+\frac{1}{2}(b+c)^2>\frac{3}{2}a^2,$$

故 $a<2$.

若 $a\leqslant\sqrt{3}$,则过 B、C 作单位圆,BC 所对圆心角不超过 $60°$,而$\angle A\geqslant 60°$,故点 A 在圆内.

若 $a>\sqrt{3}$,由中线公式可知

$$2m_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}<6-\frac{3}{2}a^2<\frac{3}{2},$$

故 $m_a<\frac{\sqrt{3}}{2}<1$. 于是以 BC 中点 D 为圆心的单位圆可覆盖$\triangle ABC$.

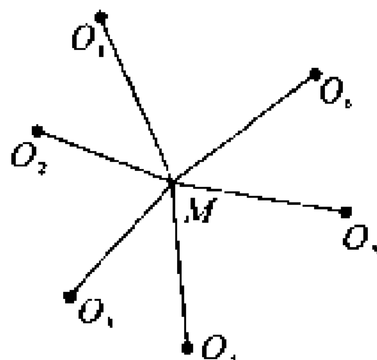
10. **解** 设覆盖 A、B、C、D 四点的圆的半径为 R,下面分两种情形:

(i) A、B、C、D 四点中有一点在其他三个点为顶角的三角形内部或边界上. 不妨设点 D 在$\triangle ABC$ 的内部或边界上,则当$\triangle ABC$ 为锐角三角形时,必有一角(设为$\angle A$)不小于 $60°$. 如例 2,可知,$2R=\frac{a}{\sin A}\leqslant\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,其中 a 为$\angle A$ 的对边长. 因此 $R\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$. 特别地,在 $AB=BC=CA=1$ 时,$R=\frac{1}{\sqrt{3}}$,表明,半径小于$\frac{1}{\sqrt{3}}$的圆不可能覆盖这四个点. 当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时,以最大边为直径能覆盖这四个点,所以 $R\leqslant\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(ii) A、B、C、D 是凸四边形的顶点,则当凸四边形有一对对角(不妨设$\angle A$、$\angle C$)$\geqslant 90°$时,以对角线 BD 为直径的圆覆盖这四个点,因此 $R\leqslant\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$. 当凸四边形有一对邻角(设$\angle A$、$\angle D$)$<90°$时,如果$\angle ADB\geqslant\angle ACB\geqslant 90°$,则以 AB 为直径的圆覆盖这四点,因此 $R\leqslant\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$;如果$\angle ADB\geqslant\angle ACB$,且$\angle ACB<90°$,则点 D 必在$\triangle ABC$ 的外接圆内或圆周上,因此. $R\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$. 这表明,覆盖平面上任意四点 A,B,C,D 的圆的最小半径应为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. **证明** 设平面上有一点 M 同时在这六个圆的内部. 连结 M 与六个圆

的圆心，如图，则



(第11题)

$$\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots+\angle O_6MO_1=360°. \quad ①$$

但另一方面，依题设

$$O_iM<O_iO_{i+1},$$

$$O_{i+1}M<O_iO_{i+1}$$

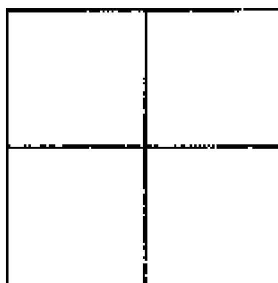
$(i=1,2,\cdots,6,O_7=O_1)$，这表明 O_iO_{i+1} 是 $\triangle O_iO_{i+1}M$ 中的最大边，$\angle O_iMO_{i+1}>60°$. 于是

$$\angle O_1MO_2+\angle O_2MO_3+\cdots+\angle O_6MO_1>360°. \quad ②$$

①、②相矛盾. 故平面上任一点都不会同时在这六个圆的内部. 即不论图钉钉在哪一点，总是不能一次钉住这六张图纸片.

练习二十

1. **证明** 将已知正方形等分为4个小正方形，如图. 则已知5点中必有2点属于同一个小正方形，这两点的距离不大于对角线长$\frac{\sqrt{2}}{2}$.


(第1题)

2. **证明** 将4个数按奇偶性放进两个抽屉里，在最坏的情况下，每个抽屉里有两个元素，则每个抽屉中两数之差为偶数，我们得到了两个是偶数的差，在乘积中提供了两个因数2. 在所有其它情况下，积中都有两个以上的因数2.

现考虑四个数被3除的情况，则必有两数关于模3同余，它们的差可被3整除. 故6个差的积可被12整除.

3. **证明** 不妨设顶点 A_1 发出的五条线段中 A_1A_2、A_1A_3、A_1A_4 为红色. 如图，若 A_2A_3、A_2A_4、A_3A_4 中有一红色，如 A_2A_3，即得红色三角形 $A_1A_2A_3$，否则 $\triangle A_2A_3A_4$ 的三边全为蓝色，也为同色三角形，命题得证.

4. **证明** $k-1$ 个两两不同的正整数 $a_k-a_1,\cdots,a_3-a_1,a_2-a_1$，连同原 k 个两两不同的正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 共有 $2k-1(>n)$个不超过 n 的正整数，故其中必有两个相等的，也就是我们有 $a_r-a_1=a_s$，也即 $a_s-a_1=a_r$.

5. **证明** 记6个点为 A、B、C、D、E、F. 如图，取过其中两点的直线 ℓ，使其余四点在 ℓ 同侧. 若 $\angle BAF\leqslant120°$，根据抽屉原理，$\angle BAC$、$\angle CAD$、$\angle DAE$、$\angle EAF$ 中必有一角不超过 $30°$. 若 $\angle BAF>120°$，考虑 $\triangle BAF$，其中 $\angle ABF+\angle AFB<60°$，根据抽屉原理，其中必有一个角不超过 $30°$.

(第 3 题)　　　　　　　　　　(第 5 题)

6. **证明**　任意一个九边形都有$\frac{9\cdot 6}{2}=27$条对角线.过平面上的任意一点 O 作与这些对角线分别平行的 27 条直线.这些直线分割以 O 为顶点的周角 360° 为 54 个角.显然,这些角中最小的一个不大于$\frac{360^\circ}{54}(<7^\circ)$.因为对角的两边作平行移动时,角的大小保持不变,故与最小的一个角的两条边平行的对角线之间的夹角小于 7°,命题获证.

7. **证明**　以下证明更一般的结论:分别将 25、13 换成 $2n+1$ 与 $n+1$.

设 A、B 是全部给定点中距离最大两点.若 $AB\leqslant 1$,则以 A 为圆心,1 为半径作圆可盖住所有 $2n+1$ 个点.若 $AB>1$,设 X 为异于 A、B 的给定点.则 $AX<1$ 或 $BX<1$.这表明所有给定的点的以 A 为圆心,1 为半径的圆中或在以 B 为圆心,1 为半径的圆中,其中必有一圆盖住了所有 $2n+1$ 个点中的 $n+1$ 个点.

特别地 $n=12$ 时命题成立.

8. **解**　两道题的得分共有 9 种情况:(2,2),(2,1),(2,0),(1,2),(1,1),(1,0),(0,2),(0,1),(0,0).因为至少有 5 人属于同一种情况,所以学生数至少有 $9\times4+1=37$ 人.

9. **证明**　先考察第一行,用三种颜色红、蓝、黄染 28 个小方格,根据抽屉原则,至少有 10 格同色.不妨设它们都是红色,且都在左边 10 列,如图所示.再继续考察第二、三、四行左边 10 格.只要

红	红	红	红	红	红	红	红	红	红									
红																		
	红																	
		红																

某行有两格染红色,即得四角同色矩形.否则又如图 15-9,每行仅一格染红色.

问题转化为 3×7 个小方格染两色情形.根据例 7,问题得证.

10. **证明** 由于 x 和 y 分别取 0,1,…,1993 可得形如 $x+y\sqrt{2}$ 的数 1994^2 个,且其中最大的数为 $1993(1+\sqrt{2})$.若把上述数标在数轴上,则左端点为 0.右端点为 $A:1993(1+\sqrt{2})$.把线段 OA 平均分成 1994^2-1 个小线段,那么 1994^2 个点总有两点落在同一小线段内,设它们对应的数为 $x_1+y_1\sqrt{2}$、$x_2+y_2\sqrt{2}$,有

$$\begin{aligned}&|x_1+y_1\sqrt{2}-(x_2+y_2\sqrt{2})|\\&=\frac{1993(1+\sqrt{2})}{1994^2-1}<\frac{1+\sqrt{2}}{1993}<\frac{3}{1993}.\end{aligned}$$

由于 $|x_1-x_2|\leqslant1993$, $|y_1-y_2|\leqslant1993$,于是,令 $x_0=x_1-x_2$, $y_0=y_1-y_2$,可得

$$x_0+y_0\sqrt{2}=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\sqrt{2},$$

满足题设要求.

练习二十一

1. **解** 先放者获胜.先放者第一步在桌面的中心放一个硬币(放几分的都可以),以后当对方放一个分币后,自已就在与对方放硬币的中心对称的位置放上一个相同的分币,这样,只要对方放得下,己方也就一定放得下,己方不会失败,当然失败的就只有对方了.

2. **解** 后开始的人会赢.为了能赢,乙(即后开始的人)在每一步上,都将棋子从甲所移动的位置上移到该位置关于方格表中心点对称的位置上.不难验证,他每次所移动的距离都大于甲前一步所移动的距离.

3. **解** 正二十四边表是一个中心对移图形,因此女孩第一步可引一条过二十四边形的对称中心的对角线(它存在,因为 24 为偶数),然后,在男孩引了任意一条对角线后,她只要引一条与男孩所引的那条对角线为中心对称的对角线即可,显然,在女孩做任一步后,已经引过的对角线两两对称,因为男孩在每步(如果它可能)都只能在 24 边形的(由第一条对角线分成的)两半中的一半中引对角线,所以女孩总有可能在另一半中引一条与之对称的对角线.由此可见,男孩不管如何画法,总不可能引最后一条对角线,也就是说女孩得胜.

4. **解** 乙将取胜.因为甲无论怎样取,余下的火柴数总不是 3 的倍数,这时乙便可通过选择 1 根或 2 根使余下的火柴数是 3 的倍数,于是甲只能再使火柴数不是 3 的倍数,乙又可使它是 3 的倍数,因为 0 是 3 的倍数,故甲总不可能获

胜，又游戏显然要在若干步后终止，故乙将获胜.

5. **证明** 设 S 是黑板上所有数之和，初始时，$S=n(2n+1)$为奇数，不妨设 $a\geqslant b$，则每次操作 S 减少 $2b$，所以 S 的奇偶性保持不变，最后剩下的数是一个奇数.

6. **解** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_6$ 依次为圆周上的6个数，考察 $I=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$，易知 I 在操作过程中保持不变，初始时 $I=2$，故目标 $I=0$ 不可能实现.

7. **证明** 假设已让一部分人搬到另一间房子里，设 H 是两间房子里所有"朋友对"数目之和。现在假定 A 在自己的房子里至少认识2个人，那么 A 在另一间房子里至多认识1个人，让 A 搬到另一间房子里，则 H 严格减少。因为这个减少的过程不可能无限进行下去，所以必有某个时刻，H 达到要求.

8. **证明** 我们有 $7^{1996}\equiv(-2)^{1996}\equiv-2 \pmod 9$，而操作过程中各位数字和 mod9 是保持不变的，因此最后所有数字不可能两两不同. 否则各位数字和将为

$$0+1+\cdots+9=45\equiv0 \pmod 9,$$

矛盾. 故必有两个相同数字.

9. **解** 考虑顶点处的火柴根数的一般情形.

设四个顶点的火柴根数依次为 a_1、a_2、a_3、a_4. 考虑和 $S=a_1-a_2+a_3-a_4$.

经过一次操作，比如从 a_1 处移走 k 根，则各顶点火柴数为 $a_1-k,a_2+k_1,a_3,a_4+k_2$，且 $k_1+k_2=2k$. 计算此时的和 S'.

$$\begin{aligned}S'&=(a_1-k)-(a_2+k_1)+a_3-(a_4+k_2)\\&=a_1-a_2+a_3-a_4-k-(k_1+k_2)\\&=S-3k.\end{aligned}$$

若从 a_2 移走 k 根，放人 a_1、a_3，同样有

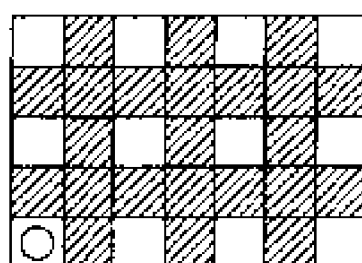
$$S''=(a_1+k_1)-(a_2-k)+(a_3+k_2)-a_4=S+3k.$$

从而无论进行多少次操作，相邻操作的差是3的倍数. 从而最后一次与最初一次的差也是3的倍数.

而第一次的 $S=1$，最后一次的 $S'=1-9+8-9=-9$，这两数的差不是3的倍数，因而不可能经过若干次操作达到题目要求.

10. **解** 为说明棋盘每个格的位置特征，可以把每个格编一个号，也可以对部分格染上色. 如图，给出一种染色方法，我们发现：开始时棋子在无色格，胜利的目标也是无色格. 即谁把棋子走人无色格，谁就有胜利的可能，谁总是把棋子走人有色格，谁就不能取胜.

从这种染色方式可以明显地看出:任何一个无色格左,下,左下三个可能跨入的格都是有色格,任何一个有色格的左,下,左下三个可能跨入的格中至少一个是无色格.可见先走者只能把棋子走入有色格,后走者总可以把棋子从有色格走入无色格.这就说明先走者不能胜,后走者只要总是把棋子走入无色格,最后一定能取胜.



(第10题)

练习二十二

1. **分析** $729=27^2=(\frac{8\times10+1}{3})^2$;

$$71289=(\frac{8\times10^2+1}{3})^2;$$

$$7112889=(\frac{8\times10^3+1}{3})^2;$$

一般地,有 $7\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}2\underbrace{88\cdots8}_{(n-1)\text{个}8}89=(\frac{8\times10^n+1}{3})^2$.

2. **分析** 先考察10以内的完全平方数,发现1和9满足题设要求.进一步考察100以内的完全平方数,无一合乎要求.是否再不可能存在满足题设要求的自然数呢?

设 $n=m^2(>1)$,有 m 个不同的正因数.n 的所有异于 m 的正因数可配对,使每对数的积等于 n.设这样的对数为 k,则 $m=2k+1$,从而 n 是奇数,且有 k 个小于 m 的正因数,恰为1至 $2k-1$ 这 k 个奇数,故 $2k-1$ 是 $(2k+1)^2$ 的因数.注意到

$$(2k+1)^2=(2k-1)(2k+3)+4,$$

故 $2k-1\mid4$.这表明 $k=1$.此时 $(2k+1)^2=9$.因此满足要求的正整数仅有9和1.

3. **证明** 设 A、B 两点间距离最大.注意到对于不同的两点 C、D.AC、BD 的中点不可能重合.否则,假设 AC、BD 相交于一点 O,则四边形 $ABCD$ 为平行四边形,不妨设 $\angle DCB\geqslant\angle CBA$,则 $\angle DCB\geqslant90°$,从而有 $DB>DC=AB$,矛盾.故除 A、B 外的点与 A、B 连线段中点彼此不同,所有红点至少有

$$2(n-2)+1=2n-3(\text{个}).$$

4. **解** 设 x、y 是 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$ 中最大者与最小者，则 $x^2\leqslant 2x$，$y^2\geqslant 2y$. 因 $x>0$，$y>0$，故 $2\leqslant y\leqslant x\leqslant 2$，有 $x=y$. 所以 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=2$.

5. **证明** 在 $2n$ 个行和列中，我们考虑车最少的. 不妨设它为行且有 k 个车. 若 $k\geqslant\frac{n}{2}$，命题显然成立；若 $k<\frac{n}{2}$，则至少有 $n-k$ 列，每列至少有 $n-k$ 个车，而其余的 k 列中每列至少有 k 个车. 从而至少有

$$\begin{aligned}&(n-k)^2+k^2\\=&\frac{n^2}{2}+\frac{(n-2k)^2}{2}\geqslant\frac{n^2}{2}.\end{aligned}$$

6. **证明** 设 b_1 是与最多个姑娘跳过舞的小伙子之一. 依题设，有姑娘 g_1 未与 b_1 跳过舞，有小伙子 b_2 与 g_1 跳过舞. 在与 b_1 跳过舞的姑娘中，必有 g_2 未与 b_2 跳过舞. 否则与 b_2 跳过舞的姑娘至少比 b_1 多 1，与 b_1 的选择不符. b_1、b_2、g_1、g_2 即满足题设要求.

7. **解** 列表：

卡片总数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…
剩下卡片序号	1	2	2	4	2	4	6	8	2	4	6	8	10	12	14	16	2	…

设卡片总数为 N，从表中可发现

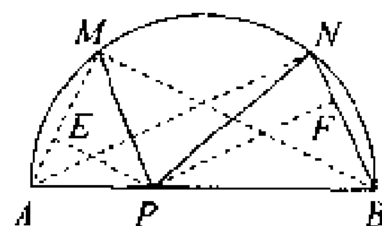
（ⅰ）当 $N=2^n(n=0,1,2,\cdots)$ 时，最后剩下的是原来的最后一张，即第 2^n 张.

（ⅱ）当 $N=2^n+m(1\leqslant m<2^n)$ 时，最后剩下的这张卡片是原来那摞卡片中的第 $2(N-2^n)$ 张.

当 $N=100$ 时，$2^6<2^7$，$2(100-2^6)=72$. 最后剩下的卡片是原来那一摞卡片的第 72 张.

8. **解** 可以验证，砝码的重量为 $1,3,3^2,3^3$ 克时，所用砝码最小，称重最大. 即为所求.

更一般地，当天平两端都可放砝码时，使用 $1,3,3^2,\cdots,3^{n-1}$ 克砝码可以称出 $1,2,3,\cdots$，至 $\frac{1}{2}(3^n-1)$ 克重的重量.



（第 9 题）

9. **分析** 点 P 位于半圆中心 O 时，易知 $\tan\angle AMP\cdot\tan\angle MNP=\cot\angle ABM\cdot\cot\angle BAN$（定值）. 以下给出证明.

如图，连结 BM、AN. 则有 $\angle AMB=90°$，过点 P 分别

作 $PE // BM$ 交 AM 于 E，$PF // AN$ 交 BN 于 F.

在 Rt△PEM 和 Rt△PNF 中得

$$\tan\angle AMP \cdot \tan\angle BNP = \frac{PE}{ME} \cdot \frac{PF}{NF} = \frac{PE \cdot PF}{ME \cdot NF}. \quad ①$$

$$\cot\angle ABM \cdot \cot\angle BAN = \cot\angle APE \cdot \cot\angle BPF = \frac{PE \cdot PF}{AE \cdot BF}. \quad ②$$

因 $PE // BM$，$PF // AN$，故 $\frac{AE}{ME} = \frac{AP}{PB} = \frac{NF}{BF}$，有

$$AE \cdot BF = ME \cdot NF. \quad ③$$

比较①、②、③即得前面结论.

10. **证明** 假设方程存在正整数解，考察使 $x^2 + y^2$ 最小的一组，设其为 (a, b, c, d). 依题设，有

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2), \quad ①$$

于是 $3 \mid a^2 + b^2$. 根据平方数性质，唯有 $3 \mid a, 3 \mid b$. 令 $a = 3m, b = 3n$，代入①得

$$c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2).$$

于是又存在原方程的一组解 (c, d, m, n)，且 $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$，矛盾. 命题获证.

练习二十三

1. **解** 每一个空格中的数的特点，它是左边第一个数与上面第一数的乘积，第一行 6 个空格中数都是 8 与第一行各数乘积，于是第一行 6 个空格中数的和等于

$$8 \times (9 + 11 + 7 + 15 + 3 + 19).$$

同样地，第二行 6 个空格中数的和等于

$$12 \times (9 + 11 + 7 + 15 + 3 + 19).$$

第三行、第四行、第五行也有类似的结果.

所以，全部 30 个数的和等于

$$(8 + 12 + 14 + 10 + 20) \times (9 + 11 + 7 + 15 + 3 + 19)$$
$$= 64 \times 64 = 4096.$$

2. **解** 依题设，有

$$3\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 4\frac{1}{y} - 1 = 0.$$

及
$$3x^2 + 4x - 1 = 0,$$

可见 $x,\frac{1}{y}$ 都是方程

$$3t^2+4t-1=0$$

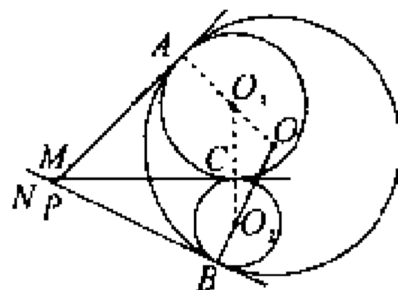
的两根. 根据韦达定理,有

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=-\dfrac{4}{3}, \\ x\cdot\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

于是,

$$y+\frac{1}{x}=\frac{xy+1}{x}=\frac{x+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{x}{y}}=\frac{-\dfrac{4}{3}}{-\dfrac{1}{3}}=4.$$

3. **证明** 假定圆 O_1、圆 O_2 的内公共切线不过点 P,由对称性,不妨设内公切线交 PA 于 M,交 BP 的延长线于 N(如图).



(第3题)

显然,PA,PB 也分别是圆 O_1、圆 O_2 的切线,于是由切线长定理得

$$NM+MC=NC=NB=NP+PB=NP+PA=NP+PM+MC,$$

故
$$NM=NP+PM.$$

这与三角形两边之和大于第三边的结果矛盾. 因此,圆 O_1、圆 O_2 的内公共切线必过点 P.

4. **证明** 假定有正整数 x,y,使 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p_1p_2}$ 成立,则两边平方,得

$$x+y+2\sqrt{xy}=p_1p_2.$$

所以 $\sqrt{xy}$ 为有理数,但正整数的算术平方根或是正整数,或是无理数,故 $\sqrt{xy}$ 为正整数.

另一方面,在 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p_1p_2}$ 两边同乘以 $\sqrt{x}$,

得
$$x+\sqrt{xy}=\sqrt{p_1p_2x},$$

故 $\sqrt{p_1p_2x}$ 为正整数. 因为 p_1,p_2 为不同质数,所以 $x=p_1p_2t^2$,$t\in\mathrm{N}$. 同理,$y=p_1p_2s^2$,$s\in\mathrm{N}$. 于是,$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p_1p_2}$ 变为 $\sqrt{p_1p_2}(t+s)=\sqrt{p_1p_2}$,可得 $t+s=1$,这与 $t+s\geqslant 2$ 矛盾. 因此,$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{p_1p_2}$ 无正整数解.

5. **证明** 假定有一种填法使 $a_1+a_2+\cdots+a_{25}+b_1+b_2+\cdots+b_{25}=0$,注意到 a_i,b_j 都是若干个 ± 1 的积,因而 a_i 和 b_j 应是 $+1$ 或 -1. 记 $a_1,\cdots,a_{25}$ 中有 ℓ

个 $-1, b_1, b_2, \cdots, b_{25}$中有 m 个 -1,那么 $\ell + m = 25$.

另一方面,$a_1 a_2 \cdots a_{25}$与 $b_1 b_2 \cdots b_{25}$都是填入的 625 个 ± 1 的积,因此 $a_1 a_2 \cdots a_{25} = b_1 b_2 \cdots b_{25}$,即$(-1)^{\ell} = (-1)^{m}$. 于是

$$(-1)^{\ell + m} = (-1)^{2m} = 1,$$

这与 $\ell + m = 25$ 矛盾. 因此,无论怎样填,$a_1 + a_2 + \cdots + a_{25} + b_1 + b_2 + \cdots + b_{25} \neq 0$.

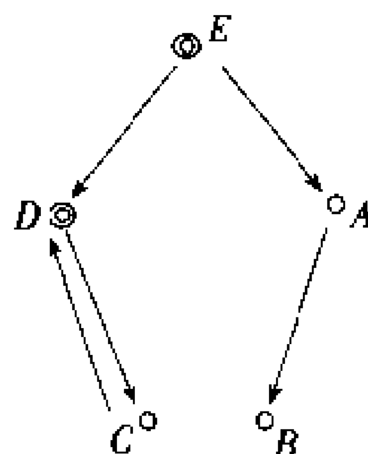
6. **解** 每根原材料的切割如下表所示,有以下情况.

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
2.3 米	2			2	1		1
1.7 米		3		1		2	1
1.3 米			4		3	2	1
损耗/米	1.7	1.2	1.1	0	0.1	0.3	1.0

显然,④,⑤,⑥三种方案损耗较小. ④,⑤,⑥,①方案依次切割原材料 42,14,29,1 根,可得 2.3 米,1.7 米,1.3 米的型材各 100 根,共用原材料

$$42 + 14 + 29 + 1 = 86(\text{根}).$$

7. **解** 如图,用 A、B、C、D、E 表示相应地方. 用 $A \to B$ 表示若去 A 地,必在 B 地,其余类似处含义相同. 把 D、E 画双层圆圈表示重点地方,至少去一地. B、C 间无线段相连,表示只去一地.



(第 7 题)

利用图示,易见若去 E 地,须去 A、D,进而去 B、C,与题设不符,故选择参观 E 地不妥. 因 E、D 至少去一地,故一定要去 D 地,进而又必须去 C 地. 于是不能去 B 地,也就不能去 A 地. 故参观团至少去 D、C 两地.

8. **解** (1)、(2)均不能实现.

自左下角起,每个方格可以用一对数(坐标)来表示,第 i 行第 j 列的方格记作(i, j). 现考虑九只兵(所在方格)的纵坐标的和 S. 一方面,每跳一次,S 增加 0 或 2,因而 S 的奇偶性不变;另一方面,右(左)上角 9 个方格的纵坐标的和比左下角 9 个方格的纵坐标之和大 $5 \times 9(=45)$,这是一个奇数. 因此,回答是否定的.

9. **解** 每个小正三角形 t 有三条边，设其中有 x_t 条边两端颜色不同，考虑所有 x_t 的和 S.

一方面，如果三角形 t 的边不在 AB、BC 或 CA 上，那么这条边还属于另一个小三角形 t'，因而它对和 S 的贡献为偶数 0 或 2. AB 上的点染上蓝白两色，并且 A 一定是蓝色，B 一定是白色，所以从 A 经过 AB 上的各个分点到 B 时，颜色改变奇数次，即 AB 上有奇数条属于小正三角形的边两端异色，BC、CA 上也是如此. 它们对 S 的贡献均为奇数. 所以 S 为奇数.

另一方面，如果每个三角形 t 中至少有两个顶点同色，那么每个三角形有 0 或 2 条两端异色的边. 它对和 S 的贡献为偶数，从而 S 为偶数.

两方面所得结果不一致. 这矛盾表明必有小的正三角形三个顶点颜色不同.

10. **证明** 分两种情形考虑：

(i) 如果平面上存在一个边长为 1 的顶点同色的正三角形，则结论显然成立.

(ii) 如果不存在边长为 1 的顶点同色的正三角形，则一定存在两个不同色的距离为 1 的点 A 和 B. 我们来以 AB 为底作一个腰长为 2 的等腰 $\triangle ABC$，则其顶点 C 或与 A 异色，或与 B 异色，不妨设 C 与 A 异色. 取 AC 中点 O，则 O 与 A、C 之一同色，不妨设 O 与 C 同色. 再以 OC 为边往两侧各作一个正三角形 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OCE$，由于 $OC=1$，而平面上又不存在边长为 1 的顶点同色的正三角形，知 D、E 皆与 O、C 异色，从而都与 A 同色. 于是知道 $\triangle ADE$ 即是一个顶点同色的正三角形，且边长是 $\sqrt{3}$.

综合上述两个方面，即知结论成立.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□
□□=
□□=256
SS□=0
□□□□=
Vss□=58201707

[x] {x}